

EXAMEN DU 27 MAI 2019

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, des ordinateurs et des téléphones portables n'est pas autorisé. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés pour la suite du problème. Il ne faut pas hésiter à traiter les questions dans l'ordre de son choix.

1. Une analyse d'erreur.

On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \frac{2x+7}{x+1}$. On souhaite montrer que f a pour limite 2 en $+\infty$ en se ramenant à la définition. Dans la proposition de réponse suivante, relever le principal problème et le mettre en évidence en une ou deux phrases.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) - 2 = \frac{5}{x+1}$. On remarque que si on prend $A = 0$, alors pour tout $x > A$ on a $|f(x) - 2| \leq \frac{5}{x}$. Si on pose $\epsilon = \frac{5}{x}$, alors on a bien montré que pour tout $x > A$ on a $|f(x) - 2| \leq \epsilon$ et ainsi f a pour limite 2 en $+\infty$.

2. Points de cours.

2.1. Montrer qu'une suite réelle convergente est de Cauchy en vous ramenant à la définition.

2.2. Donner un énoncé donnant la limite de la somme de deux fonctions admettant chacune une limite finie en un réel.

2.3. Démontrer l'énoncé donné en 2.2.

3. En liaison avec le lycée.

3.1. Donner un énoncé possible du théorème des gendarmes pour les suites destiné à une classe de Terminale.

3.2. Proposer une démonstration de cet énoncé destiné à cette classe.

3.3. Proposer une démonstration, à destination d'une classe de Terminale, du fait qu'une fonction ne peut pas à la fois tendre vers $+\infty$ et vers $-\infty$ en $+\infty$. On insistera sur le type de raisonnement utilisé.

4. Deux théorèmes du cours d'analyse.

4.1. On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et un entier $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt.$$

4.2. Avec les mêmes hypothèses, on note $M = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$. Justifier rapidement l'existence de ce réel M puis montrer que

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{M \cdot (b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dans la suite de ce problème on considère en général un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \rightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^1$. Un élément $\alpha \in I$ est appelé point fixe de f si $f(\alpha) = \alpha$. On dit qu'un point fixe $\alpha \in I$ est attractif si $|f'(\alpha)| < 1$, superattractif si $f'(\alpha) = 0$ et répulsif si $|f'(\alpha)| > 1$.

5. Deux exemples.

5.1. On considère un réel $a > 0$ et la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x}\right)$. Montrer que f admet un unique point fixe qui est superattractif.

5.2. En appliquant l'égalité des accroissements finis, déterminer l'ensemble des points fixes de la fonction Arctan dont on rappelle qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$.

6. Etude théorique d'un point fixe superattractif. On considère deux réels a et b tels que $a < b$ et une fonction $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ de classe $\mathcal{C}^2$ admettant un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$. On suppose que ce point fixe est superattractif, c'est-à-dire que $f'(\alpha) = 0$.

6.1. Montrer que si on note $M = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$, alors pour tout $x \in [a, b]$ on a $|f(x) - \alpha| \leq \frac{M}{2} |x - \alpha|^2$.

6.2. Montrer que toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in [a, b]$ et par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{2}{M} \left(\frac{M |u_0 - \alpha|}{2} \right)^{2^n}.$$

6.3. On se demande ce que l'on peut déduire de l'inégalité précédente quant à la convergence de la suite (u_n) en fonction de la position de u_0 . Dire si on peut déduire de l'inégalité précédente une condition nécessaire **ou** une condition suffisante **ou** une condition nécessaire et suffisante par rapport à la convergence de (u_n) vers α . Préciser quelle est cette condition. On justifiera rapidement.

7. Etude théorique d'un point fixe répulsif. Cette question est un petit peu plus difficile, et demande un peu plus d'initiative personnelle.

On considère ici un intervalle I de $\mathbb{R}$, une fonction $f : I \rightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^1$, et $\alpha \in I$ un point fixe répulsif de f . On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I par son premier terme $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer si la suite (u_n) converge vers α , alors la suite est constante égale à α à partir d'un certain rang.