

Dans tout le problème, les espaces vectoriels sont des espaces vectoriels sur le corps  $\mathbf{R}$  des nombres réels.

- On note  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ . Cet espace vectoriel est muni de sa norme naturelle  $\|\cdot\|_\infty$  définie par :

$$\forall \phi \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \quad \|\phi\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}} |\phi(x)| .$$

On sait que muni de cette norme,  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  est un espace de Banach (c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet).

- On note  $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  l'espace vectoriel des fonctions  $\phi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  telles que  $\phi$  et  $\phi'$  soient bornées. On admettra qu'il s'agit d'un espace de Banach pour la norme  $\|\cdot\|_{BC^1}$  définie par :

$$\forall \phi \in BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \quad \|\phi\|_{BC^1} = \|\phi\|_\infty + \|\phi'\|_\infty .$$

- On rappelle que si  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels normés, un homéomorphisme de  $E$  sur  $F$  est une application bijective de  $E$  sur  $F$ , continue et dont la bijection réciproque est continue.
- On rappelle que si  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  sont deux espaces vectoriels normés, une application linéaire  $L : E \rightarrow F$  est continue si et seulement s'il existe une constante  $C \in \mathbf{R}_+$  telle que pour tout  $x \in E$ ,

$$\|L(x)\|_F \leq C \|x\|_E .$$

Étant donnée une fonction continue  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , on considère les applications (en général non linéaires)  $\mathcal{N}_f : BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  et  $\mathcal{L}_f : BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ , dont l'existence sera justifiée en **I-1.**, définies par :

$$\begin{aligned} \forall \phi \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \quad \mathcal{N}_f(\phi) &= f \circ \phi , \\ \forall \phi \in BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \quad \mathcal{L}_f(\phi) &= \phi' + f \circ \phi . \end{aligned}$$

Le but du problème est d'étudier l'inversibilité de l'application  $\mathcal{L}_f$ , ce qui revient essentiellement à étudier les solutions bornées d'une équation différentielle de la forme  $y' + f \circ y = h$ , la fonction  $h$  étant elle-même continue et bornée sur  $\mathbf{R}$ .

On démontrera notamment un cas particulier du théorème suivant :

**Théorème.** Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'opérateur  $\mathcal{L}_f : BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  est un homéomorphisme.
- (ii) La fonction  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est un homéomorphisme.

La partie I fait établir plusieurs résultats utiles dans les parties suivantes.

La partie II propose une étude limitée au cas où  $f$  est linéaire.

La partie III propose l'étude de l'opérateur  $\mathcal{N}_f : \phi \mapsto f \circ \phi$  et fait établir l'implication suivante : *si  $\mathcal{L}_f$  est un homéomorphisme, alors  $f$  est un homéomorphisme.*

La partie IV propose d'établir que  $\mathcal{L}_f$  est un homéomorphisme si  $f$  vérifie une hypothèse additionnelle ( $H$ ) plus restrictive que la stricte monotonie.

Enfin, la partie V propose l'étude d'un exemple.

## Partie I : Préliminaires

### I-1. Existence de $\mathcal{N}_f$ et de $\mathcal{L}_f$

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ .

a) Soit  $y \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ . Montrer que  $f \circ y$  est continue et bornée.

On donne ainsi un sens à  $\mathcal{N}_f$  comme application de  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  dans lui-même.

b) Montrer de même que  $\mathcal{L}_f$  est bien définie comme application de  $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  vers  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ .

### I-2. Un opérateur intégral

Soit  $b \in \mathbf{R}_+^*$  et  $g \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ .

a) Montrer que la formule

$$T_g(x) = e^{-bx} \int_{-\infty}^x e^{bs} g(s) ds$$

permet de définir une fonction  $T_g$  de  $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ , solution sur  $\mathbf{R}$  d'une équation différentielle linéaire que l'on écrira.

b) Donner un majorant de  $\|T_g\|_{BC^1}$  en fonction de  $b$  et de  $\|g\|_\infty$ .

### I-3. Caractérisation des homéomorphismes de $\mathbf{R}$

L'objet de cette question est d'établir l'équivalence entre les assertions :

(i)  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est continue et bijective.

(ii)  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est un homéomorphisme de  $\mathbf{R}$  sur lui-même.

a) On suppose que  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est continue et injective. Soit  $\Pi_+ = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / x < y\}$  et  $\Delta$  la fonction définie sur  $\Pi_+$  par  $\Delta(x, y) = f(x) - f(y)$ . En étudiant le signe de  $\Delta$  sur  $\Pi_+$ , démontrer que  $f$  est strictement monotone sur  $\mathbf{R}$ .

b) Justifier que si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est continue et bijective, alors  $f^{-1}$  est continue.

c) Conclure.

### I-4. Solutions d'une équation différentielle non linéaire

Soit  $y$  une solution sur  $\mathbf{R}$  de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \quad y' + f \circ y = h,$$

où  $f$  désigne une fonction continue sur  $\mathbf{R}$  et  $h$  une fonction de  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ .

Démontrer que si  $y$  appartient à  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  alors elle est aussi dans  $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ .

## Partie II : Le cas linéaire

Soient une fonction  $h \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  et un nombre  $a \in \mathbf{R}$  fixés. Dans toute cette partie, on considère l'équation différentielle linéaire :

$$(\mathcal{E}_L) \quad y' + ay = h.$$

On rappelle que les solutions (maximales) de  $(\mathcal{E}_L)$  sont définies sur  $\mathbf{R}$ . On cherche à savoir s'il existe des solutions  $y$  de  $(\mathcal{E}_L)$  qui appartiennent à  $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ .

II-1. On suppose dans cette question que  $a = 0$ .

a) La fonction  $h$  étant donnée, montrer que :

- ou bien toutes les solutions de  $(\mathcal{E}_L)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}$  sont bornées ;
- ou bien aucune des solutions de  $(\mathcal{E}_L)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}$  n'est bornée.

b) Montrer que chacun de ces deux cas peut se produire.

**II-2.** L'objectif de cette question est de montrer que si  $a$  est non nul alors l'équation  $(\mathcal{E}_L)$  admet une solution bornée sur  $\mathbf{R}$  et une seule.

a) On suppose que  $a > 0$ .

En utilisant la question **I-2.**, mettre en évidence une solution  $y_0$  de  $(\mathcal{E}_L)$  qui appartient à  $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ . Donner un majorant de  $\|y_0\|_{BC^1}$  en fonction de  $\|h\|_\infty$  et de  $a$ .

b) Démontrer que si  $a > 0$  alors  $(\mathcal{E}_L)$  possède une et une seule solution bornée sur  $\mathbf{R}$ .

c) On suppose que  $a < 0$ . Démontrer que  $(\mathcal{E}_L)$  possède une et une seule solution bornée sur  $\mathbf{R}$ . On pourra introduire la fonction  $z$  telle que, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $z(x) = y(-x)$ .

**II-3.** On considère la fonction  $f : x \mapsto ax$  de  $\mathbf{R}$  dans lui-même et on définit l'application linéaire  $\mathcal{L}_f : BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  par l'expression :  $\mathcal{L}_f(y) = y' + ay$ .

Démontrer que  $f$  est un homéomorphisme si et seulement si  $\mathcal{L}_f$  est un homéomorphisme.

### Partie III : À propos des opérateurs $\mathcal{N}_f$ et $\mathcal{L}_f$

Dans cette partie,  $f$  désigne une fonction continue de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ .

Pour les questions **III-2.** et **III-4.**, on note, pour tout réel  $\alpha$ ,  $h_\alpha : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction constante  $x \mapsto \alpha$ .

**III-1. Continuité de l'opérateur  $\mathcal{N}_f$**

On veut établir que  $\mathcal{N}_f : BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  est continu. Soit  $g \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ , et  $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite d'éléments de  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  convergeant vers  $g$  au sens de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

a) Justifier l'existence du nombre réel  $\rho = \sup_{n \in \mathbf{N}} \|g_n\|_\infty$  et montrer que  $\|g\|_\infty \leq \rho$ .

b) En utilisant la restriction de  $f$  à  $[-\rho, \rho]$ , montrer que  $\mathcal{N}_f(g_n)$  tend vers  $\mathcal{N}_f(g)$  (au sens de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ ) lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Conclure.

**III-2. Cas où  $\mathcal{N}_f$  est un homéomorphisme**

On souhaite établir dans cette question que  $f$  est un homéomorphisme si et seulement si  $\mathcal{N}_f$  est un homéomorphisme.

a) On suppose d'abord que  $f$  est un homéomorphisme.

Vérifier que  $\mathcal{N}_f$  est bijectif et que  $\mathcal{N}_f^{-1} = \mathcal{N}_{f^{-1}}$ . En déduire que  $\mathcal{N}_f$  est un homéomorphisme.

b) Réciproquement, on suppose que l'opérateur  $\mathcal{N}_f$  est un homéomorphisme de  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  sur lui-même. Soit  $y \in \mathbf{R}$  arbitraire ; justifier l'existence de  $\xi \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  telle que  $\mathcal{N}_f(\xi) = h_y$ . Démontrer que  $\xi$  est constante (on pourra introduire, pour  $a \in \mathbf{R}$  fixé, la fonction  $\eta$  définie par  $\eta(x) = \xi(x + a)$  et considérer  $\mathcal{N}_f(\eta)$ ). En déduire que  $f$  est un homéomorphisme de  $\mathbf{R}$  sur  $\mathbf{R}$ .

**III-3. L'opérateur différentiel  $\mathcal{L}_f$**

Démontrer que  $\mathcal{L}_f$  est une application continue de  $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  vers  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ .

**III-4. Cas où  $\mathcal{L}_f$  est un homéomorphisme**

Dans cette question, on suppose que l'opérateur  $\mathcal{L}_f$  est un homéomorphisme de  $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  sur  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ .

a) Soit  $y \in \mathbf{R}$  et soit  $\xi \in BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  telle que  $\mathcal{L}_f(\xi) = h_y$ . Montrer que  $\xi$  est une fonction constante.

b) Démontrer que  $f$  est surjective.

c) Démontrer que  $f$  est injective.

d) En déduire que  $f$  est un homéomorphisme de  $\mathbf{R}$  sur  $\mathbf{R}$ .

## Partie IV : Un problème de point fixe

Dans cette partie, on considère une fonction continue  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ .

- **Rappel** : une fonction  $f$  réelle de variable réelle est dite  $k$ -lipschitzienne ( $k$  étant un réel positif fixé), ou encore lipschitzienne de rapport  $k$ , si on a

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

- On dira que  $f$  satisfait la propriété (H) s'il existe deux nombres réels  $m$  et  $M$ , *strictement positifs*, et tels que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad (x \neq y) \Rightarrow \left( m \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq M \right).$$

On notera qu'on a nécessairement  $m \leq M$ .

**IV-1.** Dans cette question seulement, on suppose que  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$ ; donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  satisfasse la propriété (H).

On suppose dans toute la suite de la partie **IV** que  $f$  satisfait la propriété (H).

**IV-2.** Démontrer que  $f$  est un homéomorphisme de  $\mathbf{R}$  sur  $\mathbf{R}$ .

**IV-3.** On pose  $k = \frac{m+M}{2}$ , et on introduit la fonction réelle de variable réelle  $F_k : x \mapsto f(x) - kx$ . Démontrer que  $F_k$  est lipschitzienne d'un rapport  $L$  que l'on déterminera.

**IV-4.** Soit  $h$  et  $\phi$  deux éléments de  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ . Démontrer que la fonction  $s \mapsto -F_k(\phi(s)) + h(s)$  est bornée sur  $\mathbf{R}$ . En déduire que la fonction  $G$  qui à  $h$  et  $\phi$  fait correspondre

$$G(h, \phi) : x \mapsto e^{-kx} \int_{-\infty}^x e^{ks} (-F_k(\phi(s)) + h(s)) ds$$

est bien définie et que  $G(h, \phi)$  appartient à  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ .

**IV-5.** Démontrer que les applications partielles  $\phi \mapsto G(h, \phi)$  (pour  $h \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  fixée) et  $h \mapsto G(h, \phi)$  (pour  $\phi \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  fixée) sont lipschitziennes; on précisera leurs rapports en fonction de  $L$  et  $k$ .

**IV-6.** Démontrer que  $G(h, \phi)$  appartient à  $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  et que

$$G(h, \phi)' = k(\phi - G(h, \phi)) - f \circ \phi + h.$$

**IV-7.** Soient deux fonctions  $h$  et  $\phi$  dans  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ . Démontrer que la relation  $G(h, \phi) = \phi$  a lieu si et seulement si  $\phi$  appartient à  $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  et que  $\mathcal{L}_f(\phi) = h$ .

**IV-8. L'opérateur  $\mathcal{L}_f$  comme bijection**

Soit une fonction  $h \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ . Démontrer que  $\phi \mapsto G(h, \phi)$  a un unique point fixe dans  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ . En déduire que l'opérateur  $\mathcal{L}_f : BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  est une bijection.

**IV-9. L'opérateur  $\mathcal{L}_f$  comme homéomorphisme**

a) Soient  $h_1, h_2, \phi_1, \phi_2$  des éléments de  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  tels que  $\phi_1 = G(h_1, \phi_1)$  et  $\phi_2 = G(h_2, \phi_2)$ . Déduire de la question **IV-5.** qu'il existe un réel  $r > 0$  vérifiant l'inégalité suivante :

$$\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty \leq r \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty + \frac{1}{k} \|h_1 - h_2\|_\infty.$$

b) Démontrer que l'opérateur  $\mathcal{L}_f^{-1} : BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  est lipschitzien; on précisera son rapport.

c) En déduire que l'opérateur  $\mathcal{L}_f : BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  est un homéomorphisme.

## Partie V : Un exemple

On s'intéresse à l'équation :

$$(\mathcal{F}) \quad \phi' + (2\phi + \sin^2(\phi)) = h ,$$

où  $h$  est une fonction continue et bornée sur  $\mathbf{R}$ .

**V-1.** Vérifier que les résultats de la partie **IV** s'appliquent.

**V-2.** On suppose dans cette question que  $h$  est constante.

Existe-t-il une solution bornée non constante de  $(\mathcal{F})$  ?

**V-3.** On revient au cas général ( $h$  arbitraire dans  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ ).

a) Montrer que l'équation  $(\mathcal{F})$  a une unique solution bornée  $\phi_0$ .

b) Soit  $\phi$  une solution maximale de  $(\mathcal{F})$ , a priori définie sur un intervalle ouvert  $J = ]u, v[$ . Démontrer que  $\phi' + 2\phi$  est bornée sur  $J$ .

c) On suppose que  $v$  est fini. On introduit la fonction  $\gamma$  telle que, pour tout  $x \in J$ ,  $\gamma(x) = e^{2x}\phi(x)$ . Démontrer que  $\gamma$  admet une limite à gauche au point  $v$ , et en déduire une contradiction.

d) Déduire de ce qui précède que  $J = \mathbf{R}$  et que  $\phi$  est bornée sur  $\mathbf{R}_+$ .

**V-4.** On prend désormais  $h = \sin$ . Soit  $\phi$  une solution arbitraire de l'équation  $(\mathcal{F})$  distincte de  $\phi_0$ .

On note  $\psi = \phi - \phi_0$ .

a) Démontrer que la fonction  $\phi_0$  est périodique (on donnera une période de  $\phi_0$ ).

b) Démontrer qu'il existe une fonction  $w$  de  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  telle que  $\psi$  vérifie :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \psi'(x) + 2\psi(x) = w(x) .$$

Démontrer que  $\psi$  ne s'annule pas.

c) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad |\psi(x)| \leq |\psi(0)|e^{-x} .$$

d) Trouver une constante  $\alpha \in \mathbf{R}$  telle que :

$$\forall c \in \mathbf{R}, \quad \exists (x_1, x_2) \in [c; +\infty[^2, \quad \phi(x_1) < \alpha < \phi(x_2) .$$

Comment peut-on interpréter ce résultat ?

————— FIN DU SUJET —————