

Suites de Cesaro - Théorème de Féjer

Séances du 14 et 21 octobre 2011

Les documents utilisés lors de ces deux séances sont :

- l'énoncé d'un problème de grande école sur le lemme de Cesaro et le théorème de Féjer,
- la première page d'un problème d'agrégation interne,
- une liste de questions supplémentaires
- des indications pour les questions à travailler en priorité.

1 Objectifs

Le premier objectif de ce travail est de se familiariser avec le lemme de Cesaro (démonstration avec la main dans les ϵ , contre-exemples, compréhension de l'opérateur associé, applications).

Le deuxième objectif est de situer un résultat important de la théorie des séries de Fourier : le théorème de Féjer.

Le problème permet également de revoir des points importants du cours d'analyse : utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz¹, régularité des fonctions, inégalité de convexité, convergence uniforme d'une suite de fonctions.

2 Séance du 14 octobre

Lors de la séance du 14 octobre, on s'intéresse surtout au lemme de Cesaro, donc à la partie **I** du problème sur le théorème de Féjer, à l'introduction du problème d'agrégation interne, et la question supplémentaire **1**).

- Si on peut dégager six heures contigües dans son emploi du temps, essayer de traiter le problème en conditions, c'est-à-dire essayer de rédiger de façon très précise un maximum de questions. Attention, les rapports de jury insistent sur ce point : mal rédiger en grande quantité ne paie pas.

Si on ne peut pas dégager ces six heures d'un seul tenant, et si on souhaite continuer à travailler sur le thème, voici un guide :

- Accorder un soin tout particulier à rédiger les réponses aux questions **I.1.a** à **I.1.d**. On appelle souvent **1.a** théorème ou lemme de Cesaro, et il est regretté dans le rapport de jury d'agrégation interne qu'*une preuve correcte du lemme de Cesaro n'a été donnée que par une petite majorité de candidats ; comme dans d'autres questions, les majorations sont fréquemment peu scrupuleuses. Il s'agit cependant ici pratiquement d'une question de cours, et le raisonnement de passage à la limite à l'aide d'un paramètre auxiliaire [...] est un raisonnement classique.*
- Répondre aux questions préliminaires du deuxième sujet, remarquer les liens.

¹Hermann Schwarz naît en Allemagne en 1843. Il laisse son nom à la célèbre inégalité et à l'égalité des dérivées croisées. On ne le confondra pas avec Laurent Schwartz, mathématicien français qui reçoit la médaille Fields en 1950, mais dont on devrait peu avoir à écrire le nom cette année. Sa contribution la plus célèbre est la théorie des distributions qui étend la notion de fonction et qui est utilisée en physique par exemple

- Répondre à la question supplémentaire 1).
- Chercher I.2.
- Répondre aux questions supplémentaires 2) à 5).
- Travailler les questions II.1.a à II.1.c.

3 Séance du 21 octobre

Lors de la séance du 21 octobre, on fait un rappel de cours sur les séries de Fourier, on situe le théorème de Féjer, et on travaille en priorité les autres questions conseillées dans l'ordre. Même si on n'est pas à jour du travail de la séance du 14, on peut très bien profiter de celle du 21 en considérant les questions conseillées suivantes comme des exercices indépendants.

- Revoir le cours sur les séries de Fourier. Dans l'urgence, on regardera les premières définitions, les problèmes qui se posent, les théorèmes classiques au programme. Savoir énoncer les deux principaux théorèmes démontrés dans ce problème, et ce qu'ils apportent de nouveau.
- Etablir les égalités de III.1 et III.2.
- Etablir l'inégalité du III.5.b.
- Chercher la question supplémentaire 6).
- Comblent les trous, en insistant sur les articulations des démonstrations des convergences uniformes de la partie III.

4 Questions supplémentaires.

1. Montrer que T est continue et calculer sa norme.
2. Donner un exemple de suite à termes positifs ne convergeant pas mais convergeant en moyenne.
3. Un bon moyen de vérifier sa compréhension de la démonstration du lemme de Cesaro est d'essayer de résoudre l'exercice suivant. On associe cette fois à une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $b_n = \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k}{2^n}$. Montrer que si (a_n) converge vers un réel l , alors b_n converge vers l également.
4. Comment généraliser l'énoncé précédent ?²
5. **Autre exemple d'emploi du lemme de Cesaro.** Considérons une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge vers un réel l non nul. Montrer que $u_n \sim nl$. Ce nouveau lemme peut être utile pour l'étude de suites définies par une relations de récurrence.

Par exemple, pour étudier la suite définie par son premier terme $t_0 \in \mathbb{R}^{*+}$ et la relation de récurrence $t_{n+1} = \frac{t_n}{1+t_n^2}$, commencer par déterminer sa limite. Appliquer alors le résultat démontré en considérant la suite $u_n = t_n^{-2}$, et en montrant que $u_{n+1} - u_n$ converge vers 2. En déduire un équivalent de t_n .

6. On considère la fonction f paire, 2π périodique et telle que $\forall x \in [0, \pi], f(x) = \pi - x$. En considérant son développement en série de Fourier, montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. En déduire³ $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

²Parmi les généralisations raisonnables que l'on peut donner figure le théorème de Toeplitz.

³Ce calcul est souvent donné comme application des séries de Fourier ; on se gardera pourtant de dire -surtout à un jury- que le calcul de cette somme est l'objectif de la théorie des séries de Fourier !

5 Indications à utiliser après une première recherche.

- I.1.a** - Comme on ne peut conclure à l'aide des théorèmes classiques, on revient à la définition de la limite et introduit ϵ .
 - Pour y voir plus clair, on peut commencer par traiter le cas où la limite est nulle.
 - On peut couper la somme en deux, et majorer chacune des deux parties pour des raisons différentes.
 Il peut alors être utile d'introduire un paramètre intermédiaire entier.
- I.1.d** A nouveau, on va devoir utiliser la définition d'une suite divergente vers $+\infty$.
- I.2.a** Penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
- I.2.b** On essaiera de majorer α_n en utilisant la décroissance, et en minorant $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$.
- II.1.a** On peut compter les termes u_k dans $Ts + Tv$.
- II.2.b** On conclut facilement pour v et Tv .
 Pour étudier s , on peut utiliser une comparaison série-intégrale.
- II.2.c** On peut utiliser l'exemple du **b**.
- II.3.a** La réponse attendue est liée au cours sur les séries de Fourier : le résultat découle de la formule de Parseval.
 Une autre démonstration peut-être donnée :
 1) montrer le résultat dans le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$,
 2) puis en déduire le résultat pour les fonctions continues, en raisonnant par densité.
- II.3.b** Utiliser à nouveau l'égalité de Parseval, puis les résultats du **II** et du **I**.
- III.1** Attention, il peut sembler que l'égalité résulte du calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(k\alpha)$ (qui peut découler de celui de $\sum_{k=0}^n e^{k\alpha}$), mais il y a une autre question sous-jacente : celle de l'existence de l'intégrale.
- III.3.a.** Attention, deux questions en une. On traitera très attentivement la première, pour laquelle on pourra utiliser la parité.
- III.3.b.** Utiliser un changement de variable.
- III.3.c** Utiliser un théorème de régularité n'est pas évident ici, car on n'a pas assez d'informations sur celle de f . Un changement de variable peut permettre d'utiliser les informations connues sur ϕ .
- III.3.d** Se ramener à la définition de la convergence uniforme, introduire ϵ et écrire la différence $f_p - f$ sous forme intégrale. Utiliser la continuité uniforme de f ...et rester précis !
- III.4.a** C'est ici qu'on conclut la démonstration du théorème de Féjer.
 Pour majorer $\sigma_n(f) - f$, on introduit f_p en écrivant :
 $\sigma_n(f) - f = (\sigma_n(f) - \sigma_n(f_p)) + (\sigma_n(f_p) - f_p) + (f_p - f)$.
 On peut ensuite utiliser l'inégalité triangulaire : deux des trois termes se majorent en utilisant simplement les résultats des questions **III.2.b** et **III.3.d**. Pour majorer le terme restant, on n'oubliera pas que le théorème de Dirichlet s'applique aux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- III.4.b.** Utiliser **II.2.c** et la limite connue de $\sigma_n(f)$ en 0.
- III.5.a.** Vous êtes toujours là ? Bravo !
 On peut se ramener à la définition de limite, et introduire $f(\frac{\pi}{2(n+1)})$.
- III.5.b.** Etudier la convexité d'une restriction de la fonction $\sin$.

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

Dans tout le problème, on considère des suites de nombres réels à propos desquelles on adopte les notations suivantes : à toute suite α de terme général α_n ($n \in \mathbb{N}$), on associe les deux suites $\beta = T\alpha$ et $\gamma = T^2\alpha$ de termes généraux respectifs

$$\beta_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \alpha_k \quad \text{et} \quad \gamma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \beta_k \quad .$$

Si $\beta = T\alpha$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que la suite α converge en moyenne vers ℓ , et si $\gamma = T^2\alpha$ converge vers ℓ , on dit que la suite α converge en moyenne itérée vers ℓ .

I

Soient ℓ un nombre réel et α une suite de nombres réels.

1. a. Montrer que si la suite α converge vers ℓ , elle converge en moyenne vers ℓ . Montrer que si la suite α converge vers ℓ , elle converge en moyenne itérée vers ℓ .

b. Donner un exemple de suite divergente qui converge en moyenne vers ℓ .

c. Donner un exemple de suite ne convergeant pas en moyenne vers ℓ mais convergeant en moyenne itérée vers ℓ .

d. Montrer que si α tend vers $+\infty$, il en est de même de $T\alpha$ et $T^2\alpha$.

2. On suppose dans cette question que la suite α est à termes positifs.

a. Montrer que si α converge en moyenne vers 0, il en est de même de la suite de terme général $\sqrt{\alpha_n}$.

b. Montrer que si α est décroissante, la suite de terme général $\alpha_n \sqrt{n}$ converge vers 0 si et seulement si elle converge en moyenne vers 0.

c. Montrer que si α est décroissante, la suite de terme général $n\alpha_n$ converge vers 0 si et seulement si elle converge en moyenne itérée vers 0.

II

Soient u_n ($n \in \mathbb{N}$) le terme général (réel) d'une suite, s la suite des sommes partielles $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et v la suite de terme général nu_n .

1. a. Vérifier la formule $s - Ts = Tv$.

b. Si s converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, montrer que v converge en moyenne vers 0.

c. Si s converge en moyenne vers ℓ , montrer que v converge en moyenne vers 0 si et seulement si la série de terme général u_n converge.

2. a. Donner un exemple de suite de terme général u_n telle que s converge en moyenne sans que v converge en moyenne vers 0.

b. Etudier, du point de vue de la convergence en moyenne des suites s et v , la suite de terme général $u_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+2)}$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

c. Montrer que si s converge en moyenne, v converge en moyenne itérée vers 0. La réciproque est-elle exacte ?

3. Dans toute la suite du problème, $\mathcal{C}$ est l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur $\mathbb{R}$, périodiques et de période 2π . On définit les coefficients de Fourier de toute fonction $f \in \mathcal{C}$ par

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \quad (n \in \mathbb{N}).$$

a. Rappeler brièvement pourquoi les suites de termes généraux a_n et b_n convergent vers 0.

b. Montrer que les quatre suites de termes généraux na_n^2 , $|a_n|\sqrt{n}$, nb_n^2 et $|b_n|\sqrt{n}$ convergent en moyenne vers 0. Quelles conclusions plus précises obtient-on dans le cas où la suite de terme général $|a_n|$ ou celle de terme général $|b_n|$ est décroissante ?

III

A toute fonction $f \in \mathcal{C}$ on associe sa norme uniforme $\|f\|$ sur $\mathbb{R}$, ses sommes de Fourier $S_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et les fonctions $\sigma_n(f)$ définies par $\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f)$.

1. Etablir, pour tout $x \in \mathbb{R}$ les formules

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}} \, dt \quad \text{et}$$

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin^2 \frac{(n+1)(t-x)}{2}}{2 \sin^2 \frac{t-x}{2}} \, dt$$

2. a. Pour f égale à la constante 1, quelle est la valeur de la fonction $\sigma_n(f)$? En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{(n+1)(t-x)}{2}}{2 \sin^2 \frac{t-x}{2}} \, dt.$$

b. Montrer que, pour toute $f \in \mathcal{C}$, $\|\sigma_n(f)\| \leq \|f\|$.

3. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(t) = \lambda(t^2 - \pi^2)^2 \quad \text{si} \quad |t| < \pi \quad \text{et} \quad \varphi(t) = 0 \quad \text{si} \quad |t| \geq \pi$$

où le réel λ est choisi de façon que $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \, dt = 1$.

a. Montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer λ .

b. Calculer l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(pt) p dt$ pour tout entier $p \geq 2$.

c. A toute fonction $f \in \mathcal{C}$ et tout entier $p \geq 1$ on associe la fonction f_p définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_p(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \varphi(pt) p dt.$$

Montrer que f_p est de période 2π et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

d. Montrer que la suite de terme général f_p converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.

4. Soient $f \in \mathcal{C}$, a_n et b_n ($n \in \mathbb{N}$) ses coefficients de Fourier.

a. Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$, la suite de terme général $\sigma_n(f_p)$ converge vers f_p uniformément sur $\mathbb{R}$, puis que la suite de terme général $\sigma_n(f)$ converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la suite de terme général na_n converge en moyenne itérée vers 0.

5. Dans cette question, on suppose que $f \in \mathcal{C}$ est **impair**.

a. Montrer que la suite de terme général $\sigma_n(f) \left(\frac{\pi}{2(n+1)} \right)$ converge vers 0.

b. Justifier, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'inégalité $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$.

c. On suppose **désormais** que les coefficients de Fourier b_n de f sont positifs ou nuls. Montrer que la suite de terme général

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) kb_k$$

converge vers 0.

d. Montrer que la suite de terme général nb_n converge en moyenne vers 0.

c. Montrer que la suite de terme général $S_n(f)$ converge uniformément et préciser sa limite.

Notations et objectifs du problème.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des suites $(x_k)_{k \geq 0}$ de nombres complexes, par $\mathbf{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ formé des suites bornées et par $\mathbf{E}_c$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ constitué des suites convergentes (il n'est pas demandé d'établir ces inclusions).

Si $x = (x_k)_{k \geq 0}$ est un élément de $\mathbf{E}$ on pose $\|x\| = \sup \{|x_k|, k \geq 0\}$; on admet que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbf{E}$ et que $\mathbf{E}$ est complet pour cette norme.

On note $\mathcal{T}$ l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à $x = (x_k)_{k \geq 0}$ associe $y = (y_k)_{k \geq 0}$ définie par $y_k = \frac{\sum_{j=0}^k x_j}{k+1}$. Cette application est linéaire (il n'est pas demandé de le démontrer).

Questions préliminaires

1. Montrer que $\mathbf{E}$ est stable par $\mathcal{T}$. On note T la restriction de $\mathcal{T}$ à $\mathbf{E}$.
2. Vérifier que T est une application linéaire continue.
3. Montrer que $\mathbf{E}_c$ est stable par T et plus précisément que si x converge vers l , il en est de même pour $y = Tx$.

Objectifs

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de T . Il est constitué de trois parties indépendantes.

La partie I permet d'examiner quelques exemples montrant une variété importante de comportements possibles.

Dans la partie II on détermine le noyau, l'image et le spectre de T .

La partie III est consacrée à l'aspect régularisant de T . On y établit que :

1. Si x est une suite bornée, $(T^n x)_{n \geq 0}$ converge simplement vers une suite constante.
2. L'ensemble des suites x de $\mathbf{E}$ telles que, pour tout n , $T^n x$ soit une suite divergente, est dense dans $\mathbf{E}$.
3. Si Ω est l'ensemble des suites à termes dans $[0, 1]$, on définit la probabilité de KOLMOGOROFF P sur Ω et on démontre que :
 - (a) $P(x \in \Omega \text{ et } x \text{ converge}) = 0$.
 - (b) $P(x \in \Omega \text{ et } T(x) \text{ converge}) = 1$.

Partie I : Exemples

A. Premiers exemples

1. Soit θ dans $]0, 2\pi[$; dans cette question on note x la suite $(x_k)_{k \geq 0}$ définie par $x_k = \exp(ik\theta)$. On pose $y = Tx$. Démontrer que y appartient à $\mathbf{E}_c$.
2. Soit n un entier ≥ 1 ; dans cette question on note x la suite définie par $x_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est multiple de } n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
On pose $y = Tx$.
 - (a) Calculer y_{pn+j} pour $p \geq 0$ et $0 \leq j < n$;
 - (b) En déduire que y appartient à $\mathbf{E}_c$.
3. Quel est le lien entre les exemples précédents et la troisième question préliminaire ?