– NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES –

La lettre $\mathbf{C}$ désigne le corps des nombres complexes ; les espaces vectoriels considérés seront toujours des espaces vectoriels sur ce corps $\mathbf{C}$, et les symboles $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ ont leur signification habituelle. On note $\mathbf{N}^*$ (resp. $\mathbf{C}^*$) l'ensemble des entiers $\geqslant 1$ (resp. l'ensemble des complexes non-nuls).
La lettre $\mathscr{P}$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes (« polynômes » et « fonctions polynômes » seront toujours confondus, puisqu'on travaille sur le corps $\mathbf{C}$, infini). La partie réelle (resp. la partie imaginaire) du nombre complexe z sera notée $\mathrm{Re}(z)$ (resp. $\mathrm{Im}(z)$) en un endroit du problème.
On rappelle que le symbole de Kronecker δ_{ij} vaut 1 et $i = j$ et 0 sinon (i et j étant deux entiers).

Enfin, pour une partie A d'un espace vectoriel normé $\mathscr{E}$ on note $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A.

L'objectif du problème est l'étude de l'équation de Guichard :

$$(G) \quad f(z+1) - f(z) = g(z)$$

dans un certain espace $\mathscr{E}$ de fonctions définies sur $\mathbf{C}$, qui contient $\mathscr{P}$. Dans cette équation, $g \in \mathscr{E}$ est la donnée, $f \in \mathscr{E}$ l'inconnue.
La partie I étudie l'équation (G) sur $\mathscr{P}$, et donne une application.
La partie II définit l'espace $\mathscr{E}$ et établit quelques-unes de ses propriétés qui seront utiles par la suite.
La partie III étudie l'équation (G) sur $\mathscr{E}$.
La partie IV, enfin, étudie une variante multiplicative de (G), à savoir l'équation (sur $\mathscr{E}$) :

$$(H) \quad f(qz) - f(z) = g(z)$$

dans laquelle q est un nombre complexe non nul ($q \in \mathbf{C}^*$). Cette partie fait intervenir des considérations « diophantiennes », en ce sens que la vitesse d'approximation d'un irrationnel par des rationnels doit être prise en compte.

– Partie I : L'équation (G) sur $\mathscr{P}$ et les opérateurs nilpotents –

Soit $\Delta : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ l'opérateur de différence première défini par :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad (\Delta P)(z) = P(z+1) - P(z), \text{ où } \Delta P = \Delta(P) \tag{1}$$

1. (a) Démontrer que $\Delta : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ est une application linéaire *localement nilpotente*, c'est-à-dire $\big($en notant $\Delta^n = \Delta \circ \ldots \circ \Delta$ (n fois) et $\Delta^0 = \mathrm{id}$ $\big)$:

$$\forall\ P \in \mathscr{P},\ \exists\ n \in \mathbf{N} \ \text{ tel que } \Delta^n P = 0\ .$$

(b) Existe-t-il un entier $p \in \mathbf{N}$ tel que $\Delta^p = 0$?

2. Démontrer que $\Delta : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ n'est pas injective et décrire son noyau.

3. On définit la suite $(H_n)_{n \geqslant 0}$ des *polynômes de Hilbert* sur $\mathbf{C}$ par :

$$H_0(z) = 1;\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ H_n(z) = \frac{z(z-1)(z-n+1)}{n!}\ .$$

(a) Démontrer que $\Delta H_0 = 0$, $\Delta H_n = H_{n-1}$ si $n \geqslant 1$, et $\big(\Delta^k H_n\big)(0) = \delta_{n,k}$.
(b) Démontrer que $(H_n)_{n \geqslant 0}$ est une base de $\mathscr{P}$ et que, plus précisément :

$$\forall P \in \mathscr{P},\ P = \sum_{n=0}^{\infty} \big(\Delta^n P\big)(0) H_n \tag{2}$$

Expliciter les coefficients du polynôme $z \to z^3$ sur la base (H_n).

(c) Démontrer que $\Delta : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ est surjective. Comment conciliez-vous cela avec la question 2) ?

4. (a) Soit p un entier fixé ; on écrit $z^p = f(z+1) - f(z)$, avec $f \in \mathscr{P}$ et $f(0) = 0$. Démontrer que

$$\forall N \in \mathbf{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} n^p = f(N+1) \tag{3}$$

(b) Donner une formule simple pour calculer $\sum_{n=0}^{N} n^3$ en fonction de N.

5. (a) Pour $P \in \mathscr{P}$, on pose $\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$. Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathscr{P}$.

(b) L'application linéaire $\Delta : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ est-elle continue pour la norme précédente ?

(c) Montrer qu'il existe une norme sur $\mathscr{P}$ pour laquelle Δ est continue.
Indication : on pourra utiliser le caractère localement nilpotent de Δ pour définir à partir de la formule (2) une norme faisant de Δ une application linéaire de norme 1.

6. On rappelle le *lemme de Baire pour les espaces vectoriels normés complets ou « espaces de Banach »* (admis ici) : Si $(F_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de fermés d'un espace de Banach dont la réunion est tout l'espace, alors l'un au moins de ces fermés, F_p, est d'intérieur non-vide ($\overset{\circ}{F}_p \neq \emptyset$). On se donne X un tel espace de Banach (ici sur $\mathbf{C}$).

(a) Soit Y un sous-espace vectoriel de X ; montrer que $\overset{\circ}{Y} \neq \emptyset \Longrightarrow Y = X$.

(b) Soit $T : X \to X$ une application linéaire continue *localement nilpotente* :

$$\forall x \in X,\ \exists n \in \mathbf{N} : T^n(x) = 0\ .$$

Démontrer que T est nilpotente : il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $T^n = 0$.

7. (a) L'espace vectoriel $\mathscr{P}$ est-il complet pour la norme construite au **5)c)** ?

(b) L'espace vectoriel $\mathscr{P}$ est-il complet pour au moins une norme ?

– Partie II : L'espace $\mathscr{E}$ des fonctions entières –

Soit $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel des fonctions entières, c'est-à-dire des fonctions $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ qui s'écrivent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

où la série entière figurant au second membre a un rayon de convergence infini. On a immédiatement $\mathscr{P} \subset \mathscr{E}$.

1. (a) Démontrer que les a_n sont déterminés de façon unique par f et que l'on a plus précisément :

$$\forall r > 0,\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int}\, \mathrm{d}t\ . \tag{4}$$

(b) On pose $M(f,r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Démontrer que :

$$\forall r > 0,\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad |a_n| \leqslant \frac{M(f,r)}{r^n}\ . \tag{5}$$

(c) Démontrer que $\mathscr{P}$ n'est pas égal à $\mathscr{E}$ (il suffira de donner un exemple d'une fonction $f \in \mathscr{E}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, qui n'est pas un polynôme ; on justifiera la réponse).

(d) Démontrer que les seules fonctions de $\mathscr{E}$ qui sont bornées sont les constantes.

(e) Démontrer que

$$f \in \mathscr{P} \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge uniformément sur } \mathbf{C} \text{ tout entier.}$$

2. Cette question a pour but de mettre en place quelques propriétés importantes de l'espace $\mathscr{E}$.

(a) Soit (f_k) une suite de fonctions de $\mathscr{E}$, $f_k(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} z^n$. On suppose que (f_k) converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbf{C}$. Démontrer que f appartient à $\mathscr{E}$.
Indication : on pourra commencer par démontrer que :

$$\forall R > 0,\ \exists M > 0 \quad / \quad \forall (n,k) \in \mathbf{N}^2,\ |a_n^{(k)}| \leqslant \frac{M}{R^n}\ .$$

(b) Démontrer qu'une fonction f de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement s'il existe une suite de polynômes (P_n) convergeant uniformément vers f sur tout compact de $\mathbf{C}$.

(c) Démontrer que $\mathscr{E}$ est stable par produit, c'est-à-dire que $f, g \in \mathscr{E} \Longrightarrow fg \in \mathscr{E}$.

(d) Soit $f \in \mathscr{E}$, $a \in \mathbf{C}$ et $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par $g(z) = f(z+a)$. Montrer que $g \in \mathscr{E}$. Ainsi, $\mathscr{E}$ est stable par translation.

3. Une suite $(\lambda_n)_{n \geqslant 0}$ de complexes est dite un *multiplicateur* de $\mathscr{E}$ si, pour toute fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathscr{E}\ ,$$

la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n z^n$ définit un élément de $\mathscr{E}$, c'est-à-dire a un rayon de convergence infini.
On se propose de montrer qu'on a équivalence entre :
i) (λ_n) est un multiplicateur de $\mathscr{E}$;
ii) il existe des constantes $A, B > 0$ telles que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad |\lambda_n| \leqslant AB^n$.

(a) Démontrer que ii) implique i).

(b) On suppose que ii) n'est pas réalisée. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(n_j)_{j \geqslant 1}$ d'entiers $\geqslant 1$ avec : $\forall j \geqslant 1,\ |\lambda_{n_j}| > j^{n_j}$. Puis montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathscr{E}$, de la forme $f(z) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{n_j} z^{n_j}$, telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{n_j} \lambda_{n_j} z^{n_j}$ ne soit pas infini. En déduire que ii) implique i).

4. (a) Démontrer que Δ, défini par $(\Delta f)(z) = f(z+1) - f(z)$, envoie $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$.

(b) Décrire le noyau $\ker \Delta$ de $\Delta : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, et montrer que ce noyau est de dimension infinie. Ainsi, $\Delta : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ est très loin d'être injective. On verra dans la partie III qu'elle est cependant surjective.

5. On rappelle que pour $\rho > 0$ et f définie et continue sur le cercle de centre 0 et de rayon ρ ($|w| = \rho$), à valeurs complexes, l'intégrale curviligne

$$I = \int_{|w|=\rho} f(w)\, \mathrm{d}w$$

est par définition :

$$I = \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) i\rho e^{it}\, \mathrm{d}t\ . \tag{6}$$

(a) Démontrer que $|I| \leqslant 2\pi\rho\, M(f,\rho)$.
(b) Montrer que si f appartient à $\mathscr{E}$ alors $I = 0$.
(c) Soit un élément h de $\mathscr{E}$ et un entier $k \in \mathbf{Z}$. On pose :

$$J_k(h,\rho) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|w|=\rho} w^k h(w)\,\mathrm{d}w\ .$$

Démontrer que $J_{-1}(h,\rho) = h(0)$ et $J_k(h,\rho) = 0$ pour tout $k \geqslant 0$.

6. **(a)** Montrer qu'il existe une fonction g de $\mathscr{E}$ telle que

$$w \in \mathbf{C} \Longrightarrow e^w = 1 + w + w^2 g(w) \quad \text{avec de plus} \quad |g(w)| \leqslant e-2 \quad \text{si} \quad |w| = 1\ .$$

(b) Soit $k \in \mathbf{Z}$, et

$$I_k = \frac{1}{2i\pi}\int_{|w|=1} \frac{w^k}{e^w - 1}\,\mathrm{d}w\ .$$

i) Démontrer que I_k est bien définie.
ii) Démontrer que $I_0 = 1$ et que $I_k = 0$ si $k \geqslant 1$.
Indication : on pourra par exemple faire intervenir une série géométrique.

– Partie III : L'équation de Guichard dans $\mathscr{E}$ –

A) Les polynômes de Bernoulli et une application :

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $z \in \mathbf{C}$, on pose :

$$B_n(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{|w|=1} \frac{e^{zw}}{(e^w - 1)}\,\frac{\mathrm{d}w}{w^n}\ . \tag{7}$$

1. Démontrer que

$$B_n(z) = n!\sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_{k-n}}{k!} z^k$$

puis que B_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Calculer B_0.

2. **(a)** Démontrer que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ B_n'(x) = nB_{n-1}(x)\ . \tag{8}$$

(b) Démontrer que

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*,\ B_n(z+1) - B_n(z) = nz^{n-1}\ , \tag{9}$$

et que $B_n(1) = B_n(0)$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

3. **(a)** Démontrer que

$$\forall n \geqslant 1, \ \int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x = 0\ . \tag{10}$$

(b) Calculer B_1, B_2, B_3.

Les deux questions suivantes proposent une application (à l'ordre 2) des polynômes B_n.

4. Soit $h : [0,1] \to \mathbf{C}$, de classe $\mathscr{C}^2$.

(a) Démontrer que

$$\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \frac{h(0)+h(1)}{2} - \int_0^1 h'(t)B_1(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

(b) Montrer ensuite que

$$\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \frac{h(0)+h(1)}{2} + \frac{h'(0)-h'(1)}{12} + \frac{1}{2}\int_0^1 h''(t)B_2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

5. Soit $\varphi : [1,\infty[\to \mathbf{C}$ une fonction de classe C^1, et N un entier non nul. On pose :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \varphi(n) \ \text{ et } I_N = \int_1^N \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

On désigne par π_2 la fonction 1-périodique valant $\frac{B_2}{2}$ sur $[0,1[$.

(a) Montrer qu'on a, pour $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\varphi(n)+\varphi(n+1)}{2} + \frac{\varphi'(n)-\varphi'(n+1)}{12} + \int_n^{n+1} \varphi''(t)\pi_2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

(b) Démontrer que

$$S_N = I_N + \frac{1}{2}\Big(\varphi(1)+\varphi(N)\Big) + \frac{1}{12}\Big(\varphi'(N)-\varphi'(1)\Big) - \int_1^N \varphi''(t)\pi_2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

(c) On suppose que $|\varphi''|$ est intégrable sur $[1,\infty[$ et que $\varphi(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\varphi(n)$ et l'intégrale généralisée (impropre) $\int_1^\infty \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

(d) Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$?

B) Solution de l'équation (G) de Guichard

1. **(Question préliminaire) :** Soit $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, $g \in \mathscr{E}$. On veut résoudre l'équation $\Delta f = g$, avec $f \in \mathscr{E}$. Pourquoi est-il plausible de prendre

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{B_{n+1}}{n+1}\ ?$$

Qu'est-ce qui pourrait empêcher ce choix ?

La suite de cette partie est consacrée à une modification des polynômes de Bernoulli destinée à contourner cet obstacle.

2. On se propose d'abord de montrer par l'absurde le fait suivant :

$$\text{Il existe } c>0 \text{ tel que : } \forall n \in \mathbf{N},\ |w| = (2n+1)\pi \Longrightarrow |e^w - 1| \geqslant c\,. \tag{11}$$

On suppose donc qu'une telle constante c n'existe pas.

i) Montrer qu'on peut trouver des suites $(n_j)_{j\geqslant 1}$ d'entiers positifs et $(w_j)_{j\geqslant 1}$ de complexes telles que $|w_j| = (2n_j+1)\pi$ et $\lim_{j\to\infty} e^{w_j} = 1$.

ii) Démontrer que l'on a : $\lim_{j\to\infty} \mathrm{Re}(w_j) = 0$ et $\lim_{j\to\infty}\Big(|\operatorname{Im}(w_j)| - (2n_j+1)\pi\Big) = 0$.

iii) Montrer qu'il existe une suite (ε_j), à valeurs dans $\{+1,-1\}$ et telle que la quantité $\delta_j = w_j - i\varepsilon_j(2n_j+1)\pi$ tende vers 0 quand j tend vers $+\infty$.

iv) Conclure que (11) est vrai.

Dans ce qui suit, on pose, pour $n \in \mathbf{N}$ et $z \in \mathbf{C}$:

$$\rho_n = (2n+1)\pi;\ A_n(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{|w|=\rho_n} \frac{e^{zw}}{(e^w-1)}\frac{\mathrm{d}w}{w^n}\,. \tag{12}$$

3. Démontrer que A_n est dans $\mathscr{E}$, et que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall z \in \mathbf{C},\quad (\Delta A_n)(z) = nz^{n-1}\ .$$

4. Montrer qu'il existe des constantes a et b strictement positives telles que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall z \in \mathbf{C},\ |A_n(z)| \leqslant a e^{nb|z|}\ . \tag{13}$$

5. Soit $g \in \mathscr{E}$. Démontrer que l'équation de Guichard (G) : $f(z+1) - f(z) = g(z)$ possède au moins une solution dans $\mathscr{E}$. Décrire toutes les solutions de (G).

– Partie IV : La version multiplicative (H) de l'équation de Guichard –

Soit $q \in \mathbf{C}^*$. On considère dans cette partie l'équation « aux q-différences »

$$(H)\quad f(qz) - f(z) = g(z), \quad \text{avec } g \in \mathscr{E}\ .$$

1. On suppose $|q| \neq 1$. Démontrer que (H) possède une solution $f \in \mathscr{E}$ si et seulement si $g(0) = 0$. Décrire alors l'ensemble de toutes les solutions.

Dans la suite, on suppose $|q| = 1$ *et plus précisément* $q = e^{2i\pi\theta}$, *où* $\theta \notin \mathbf{Q}$.

2. (Question préliminaire) : Pour $x \in \mathbf{R}$, on note $\|x\|$ la distance de x à l'entier le plus proche :

$$\|x\| = d(x, \mathbf{Z}) = \inf_{m \in \mathbf{Z}} |x - m| = \min_{m \in \mathbf{Z}} |x - m|\ .$$

Démontrer que $\|x\| \leqslant \frac{1}{2}$, et qu'on a la double inégalité :

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad 4\|x\| \leqslant |e^{2i\pi x} - 1| \leqslant 2\pi\|x\|\ .$$

Indication : on rappelle que $0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin u \geqslant \frac{2}{\pi} u$.

3. On dit que θ est *lentement approchable* (par des rationnels) s'il existe $a > 0$ et $b > 1$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \|n\theta\| \geqslant a b^{-n}\ . \tag{14}$$

On dit que θ est *vite approchable* si $\theta \notin \mathbf{Q}$ et si θ n'est pas lentement approchable. On note A l'ensemble des irrationnels lentement approchables, et B l'ensemble des irrationnels vite approchables.

(a) Démontrer que $\sqrt{2} \in A$.

(b) Montrer qu'il existe une suite croissante d'entiers positifs $(p_k)_{k \geqslant 1}$ telle que l'on ait :

$$\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p_k}} \in B\ .$$

Indication : on pourra définir les p_k de proche en proche afin d'avoir une croissance suffisamment rapide.

4. Soit θ un irrationnel, et $q = e^{2i\pi\theta}$.

(a) Montrer la double inégalité :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\quad 4\|n\theta\| \leqslant |q^n - 1| \leqslant 2\pi\|n\theta\|\ .$$

(b) Montrer qu'on a équivalence entre :

i) θ est *lentement approchable*, autrement dit $\theta \in A$;

ii) pour toute $g \in \mathscr{E}$ avec $g(0) = 0$, l'équation (H) possède une solution $f \in \mathscr{E}$.

Indication : on pourra utiliser la question **3)** de la partie **II** sur les multiplicateurs de $\mathscr{E}$.

———— FIN DU SUJET ————