Autour des suites de Cesàro.

Séances des 26 septembre et 3 octobre 2014

A toute suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on associe la suite de Cesàro $(\mathcal{C}u)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui est la suite complexe définie par l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{C}u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k. \tag{1}$$

Partie I : suites de Cesàro

I.1.a. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite de terme général $e^{in\theta}$ converge si et seulement si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.
I.1.b. On suppose $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Montrer que la convergence de la suite $\sin(n\theta)$ entraine celle de la suite de terme général $\cos(n\theta)$.
I.1.c. Conclure quant à la convergence de la suite $\sin(n\theta)$ en fonction de $\theta \in \mathbb{R}$.
I.1.d. Donner pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ une expression simple (ne faisant plus apparaître de somme) du terme général de la suite $\mathcal{C}u$ lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de terme général $u_n = \sin((n+1)\theta)$.

I.2.a. Montrer le théorème de Cesàro, c'est-à-dire montrer que si une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un complexe l, alors $\mathcal{C}u$ converge également vers l.
I.2.b. La réciproque du théorème de Cesàro est-elle vraie ?

I.3.a. Montrer que si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors il en est de même pour $\mathcal{C}u$.
I.3.b Etudier la réciproque de la proposition précédente.

I.4.a. *Application aux suites récurrentes.* On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et une suite complexe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que que la suite $v_{n+1} - v_n$ converge vers λ. Montrer que $v_n \sim \lambda n$.
I.4.b Soit $c > 0$ et $f : [0, c] \to [0, c]$ une fonction continue admettant en 0 un développement asymptotique de la forme $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$ où $a > 0$ et $\alpha > 1$. Montrer que pour $\omega > 0$ assez petit, la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $x_0 \in [0, \omega[$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers 0.
I.4.c Déterminer un réel β tel que la suite $\left(x_{n+1}^\beta - x_n^\beta\right)$ ait une limite non nulle. En déduire un équivalent de la suite (x_n).
I.4.d. Traiter l'exemple où f est la fonction $x \mapsto \sin(x)$.

Partie II : limites supérieure et inférieure d'une suite

L'objectif de cette partie est de définir la limite supérieure et la limite inférieure d'une suite et d'en étudier les premières propriétés. Il est donc interdit pour cet exercice d'utiliser des propriétés relatives à ces deux notions non redémontrées.

II.1. Soit n_0 un entier et $(x_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle bornée. On lui associe la suite $(X_n)_{n\geq n_0}$ de parties de $\mathbb{R}$ définie par $\forall n \geq n_0,\ X_n = \{x_k \mid k \geq n\}$. Montrer qu'on peut définir deux suites réelles $(a_n)_{n\geq n_0}$ et $(b_n)_{n\geq n_0}$ par les égalités $\forall n \geq n_0,\ a_n = \sup X_n$ et $\forall n \geq n_0,\ b_n = \inf X_n$.

II.2. Calculer les suites (a_n) et (b_n) dans les cas où
i) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = 3 + \frac{1}{n^2}$ et
ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = 5 + 2 \times (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$.

II.3. Ici on revient au cas général. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

II.4. On note alors $\limsup(x_n)$ la limite de la suite (a_n), et $\liminf(x_n)$ la limite de la suite (b_n). Vérifier la convergence de ces deux suites dans le cas des exemples de la question **II.2** .

II.5. Montrer que $\limsup(x_n) = \liminf(x_n)$ si et seulement si (x_n) converge.

II.6. Si $(x_n)_{n\geq n_0}$ et $(y_n)_{n\geq n_0}$ sont deux suites réelles bornées, comparer $\limsup(x_n + y_n)$ et $\limsup(x_n) + \limsup(y_n)$.

II.7.a. Montrer que pour toute suite réelle bornée $(x_n)_{n\geq n_0}$ le réel $\limsup(x_n)$ est une valeur d'adhérence de (x_n).
II.7.b. Démontrer que $\limsup(x_n)$ est la plus grande des valeurs d'adhérence de (x_n).
II.7.c. Montrer que si une suite réelle bornée a une unique valeur d'adhérence, alors elle est convergente.
II.7.d. On suppose qu'un suite réelle bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que $x_n + \frac{x_{2n}}{2}$ converge vers 0. Montrer que (x_n) est convergente.

II.8.a. On considère cette fois le cas d'une suite réelle $(x_n)_{n\geq n_0}$ non nécessairement bornée. Montrer que la définition donnée plus haut définit cette fois deux éléments $\liminf(x_n)$ et $\limsup(x_n)$ de $\overline{\mathbb{R}}$.
II.8.b. Cette dernière définition de la limite supérieure permet certains énoncés concis, comme par exemple le théorème d'Hadamard que nous admettrons ici, avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

> **Théorème d'Hadamard :** Soit $(a_n)_{n\geq n_0}$ une suite de complexes. La série entière $\sum_{n\geq n_0} a_n z^n$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{\limsup\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)}$

En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$.

II.9. Montrer que pour tout suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a les inégalité suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\liminf u_n \leq \liminf \mathcal{C}u_n \leq \limsup \mathcal{C}u_n \leq \limsup u_n \ .$$

Partie III : un théorème taubérien

On considère dans cette partie une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de premier terme u_0 nul, et à laquelle on associe les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par les égalités

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k.$$

On s'intéresse aux liens entre les propositions

i) la suite (S_n) converge et

ii) la suite (σ_n) converge

On sait depuis la partie **I** que i) implique ii). Nous allons nous intéresser à des tes théorèmes donnant des conditions sur la suite (u_n) pour que l'autre implication soit vraie. Ces théorèmes sont appelés des théorèmes taubériens.

III.1. Montrer que si la suite (u_n) est à termes positifs, alors la proposition ii) implique la proposition i).

III.2.a. On revient au cas général : montrer que $(S_n - \sigma_n)$ converge vers 0 si et seulement si $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k u_k$ converge vers 0.

III.2.b. En déduire que dans le cas où la suite (u_n) est un $o\left(\frac{1}{n}\right)$, on a la proposition ii) qui implique la proposition i).

III.3 L'objectif de la question III.3 est d'établir qu'avec l'hypothèse (u_n) est un $O\left(\frac{1}{n}\right)$, la proposition ii) implique encore la proposition i). A partir de maintenant on suppose que (u_n) est un $O\left(\frac{1}{n}\right)$, et que la suite (σ_n) converge.

III.3.a. Montrer que pour tout couple d'entiers (n, p) on a l'égalité :

$$(p+1)\sigma_{(p+1)n} - p\sigma_{pn} = \sum_{k=1}^{pn} u_k + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right) u_{pn+k}.$$

III.3.b En déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\left|(p+1)\sigma_{(p+1)n} - p\sigma_{pn} - S_{pn}\right| \leq \frac{A}{p}.$$

III.3.c Dans cette question on considère deux entiers n et p tels que $n \geq p$, et on pose $m = [\frac{n}{p}]$, où $[.]$ désigne la partie entière. Donner une majoration simple de $|S_n - S_{pm}|$ en fonction de m et A, puis en déduire l'inégalité de Hardy :

$$\left|(p+1)\sigma_{(p+1)[\frac{n}{p}]} - p\sigma_{p[\frac{n}{p}]} - S_n\right| \leq A\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{[\frac{n}{p}]}\right)$$

III.3.d Pour un entier p fixé, calculer la limite de $(p+1)\sigma_{(p+1)[\frac{n}{p}]} - p\sigma_{p[\frac{n}{p}]}$ quand n tend vers l'infini, puis conclure.

Partie IV : théorème taubérien fort pour les séries entières

On rappelle le théorème de Weierstrass que l'on peut utiliser sans démonstration dans cette partie.

Théorème de Weierstrass : pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $h \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, il existe un polynôme g à coefficients réels tel que $\sup_{x\in[a,b]} |h(x) - g(x)| < \epsilon$.

Dans cette partie on considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait pour rayon de convergence 1. On note F la somme de cette série sur son domaine de convergence.

IV.1. Dans cette question **IV.1** on suppose que la série $\sum a_n$ converge : on souhaite montrer que $\lim_{x\to 1^-} F(x)$ existe et vaut $\sum a_n$. Pour tout entier $n \geq 0$ et $x \in [0,1]$ on note

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ et } R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

IV.1.a. Montrer que pour tout couple d'entiers p et q tels que $q > p$ on a

$$S_q(x) - S_p(x) = \sum_{k=p+1}^{q-1} R_k \left(x^{k+1} - x^k\right) + R_p x^{p+1} - R_q x^q.$$

IV.1.b. Montrer que (S_n) converge uniformément vers F sur $[0,1]$ et conclure.

IV.2. Montrer que sans hypothèse supplémentaire, il n'y a pas de réciproque : c'est-à-dire qu'on peut avoir $\lim_{x\to 1^-} F(x)$ qui existe alors que $\sum a_n$ ne converge pas.

IV.3. A partir de maintenant, on s'intéresse au cas où $a_n \in O\left(\frac{1}{n}\right)$. L'objectif de cette partie est de montrer que sous cette hypothèse, si $\lim_{x\to 1^-} F(x)$ existe et vaut 0, alors $\sum a_n$ converge et sa somme vaut 0.

On notera Φ l'ensemble des fonctions $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in [0,1[,\ \sum a_n \phi(x^n) \text{ converge, et}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi(x^n) = 0$$

IV.3.a Vérifier que toute fonction polynômiale nulle en 0 est élément de Φ.

IV.3.b. Soit q une fonction polynômiale nulle en 0. Montrer que

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n) = \int_0^1 q(t)dt.$$

IV.3.c. On considère g la fonction indicatrice de l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$, et $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ l'unique fonction continue telle que $\forall x \in]0,1[,\ h(x) = \frac{g(x)-x}{x(1-x)}$.

IV.3.d. On fixe $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe deux fonctions s_1 et s_2 définies sur $[0,1]$, à valeurs réelles, continues, telles que $s_1 \leq h \leq s_2$ et $\int_0^1 s_2(t) - s_1(t) < \epsilon$.

IV.3.e. . En déduire l'existence de deux fonctions polynômiales u_1 et u_2 telles que $u_1 < h < u_2$ et $\int_0^1 u_2(t) - u_1(t) < 3\epsilon$.

IV.3.f On considère alors les deux fonctions polynômiales p_1 et p_2 définies par $\forall x \in [0,1],\ p_1(x) = x + x(x-1)u_1(x)$ et $\forall x \in [0,1],\ p_2(x) = x + x(x-1)u_2(x)$. Vérifier que $p_1 \leq g \leq p_2$ et que $\int_0^1 q(x)dx < 3\epsilon$, avec $q\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in [0,1], q(x) = \frac{p_2(x)-p_1(x)}{x(1-x)}$.

IV.3.g. Montre que $g \in \Phi$. On pourra utiliser en la justifiant l'inégalité

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n)\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,(p_2 - p_1)(x^n).$$

IV.3.h. Conclure .

1 Indications à utiliser après une première recherche.

I.1.a	On peut utiliser l'égalité $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{i(n+1)\theta} = e^{i\theta}e^{in\theta}$ et passer à la limite.
I.1.b	On peut par exemple partir d'une expression de $\sin((n+1)\theta)$ en fonction de $\cos(n\theta)$.
I.1.d	On peut se ramener à une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$.
I.2.a	Comme on ne peut conclure à l'aide des théorèmes classiques, on revient à la définition de la limite et introduit ϵ. On peut montrer que pour $n > n_0$ on a $\lvert(\mathcal{C}u)_n - l\rvert \leq \frac{\sum_{k=0}^{n_0} \lvert u_k - l\rvert}{n} + \frac{\sum_{k=n_0+1}^{n-1} \lvert u_k - l\rvert}{n}$. Reste à majorer les deux membres par $\epsilon/2$, et à écrire les choses proprement, dans l'ordre !
I.3.a	A nouveau, on va devoir utiliser la définition d'une suite divergente vers $+\infty$... Cette question permet de voir si on a bien compris **I.2.a**
I.4.b	On peut essayer de montrer la monotonie de la suite en trouvant un intervalle $]0, \omega[$ tel que pour tout x dans $]0, \omega[$ on ait $f(x) < x$.
II.5	Une des implications se montre très vite ; pour l'autre, on peut par exemple se ramener à la définition de la convergence.
II.6	On peut commencer par regarder quelques exemples simples pour avoir une idée du résultat. Pour une suite réelle bornée (x_n), on peut d'abord remarquer que Pour tout $n \geq n_0$, on a $\forall k \geq n,\ x_k \leq a_n$
II.7.a	Si on appelle l^+ la limite supérieure de la suite (x_n), on peut essayer de montrer que pour tout $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ il existe $k \geq N$ tel que $\lvert x_k - l^+\rvert \leq \epsilon$ Pour cela, on peut utiliser le fait que (a_n) converge vers l^+.
II.7.b	A nouveau, il y a plusieurs façons de faire ; l'une d'elle est de raisonner par l'absurde.
II.7.c	Quelle est la propriété correspondante à **II.7.b** pour la limite inférieure ?
II.7.d	On peut montrer que si l est valeur d'adhérence, alors $-2l$ est également valeur d'adhérence.
II.8.b	Une façon de faire est d'utiliser un des résultats précédents...
III.1	On peut écrire la contraposée.
III.2.a	On peut compter dans les sommes intervenant dans $S_n - \sigma_n$ la contribution de chacun des u_k.
III.3.a	Des majorations grossières sur les fractions peuvent suffire.
III.3.d	Ne perdons pas de vue que nous souhaitons majorer $\lvert S_n - l\rvert$: introduisons $\epsilon > 0$ et utilisons une inégalité triangulaire judicieuse...
IV.1.a.	C'est une transformation d'Abel : on peut exprimer a_k en fonction de R_k et R_{k-1}.
IV.1.b.	On peut appliquer le critère de Cauchy uniforme.
IV.3.a	On peut commencer par des polynômes très simples !
IV.3.d	On peut s'aider d'un dessin, avant de décrire ces fonctions.

2 Sources.

◇ La partie **I** sur la suite de Cesàro est vraiment très classique : on retrouvera le résultat sur la convergence de la suite de Cesàro dans presque tous les livres de sup.

◇ On peut retrouver la question **I.4** sur les suites récurrentes dans le livre *Analyse à une variable réelle* d'Alain Tissier et Jean-Noël Mialet.

◇ On peut retrouver un exercice introduisant la notion de limite supérieure dans le livre *L'analyse bien tempérée* de Bertrand Rungaldier.

◇ La méthode mise en avant en **II.7** (montrer qu'une suite suite est bornée et n'a qu'une valeur d'adhérence pour en assurer la convergence) peut s'appliquer à de nombreux problèmes. On trouve plusieurs exemples d'application dans le livre *Oraux X-ENS Analyse 1* de Serge Francinou, Hervé

Gianella et Serge Nicolas.

$\diamond$ L'exemple d'application du théorème d'Hadamard provient du livre *Analyse à une variable réelle* de A. Tissier et J-N. Mialet.

$\diamond$ La partie **III** a été construite à partir du texte *Le premier théorème taubérien de Hardy* écrit par Jean-François Burnol et disponible sur sa page, entouré d'autres trésors. On peut retrouver une autre version de cet exercice dans le livre *Oraux X-ENS Analyse 1* de S.Francinou, H.Gianella et S.Nicolas.

$\diamond$ Enfin, la partie **IV** est pratiquement extraite du livre *Analyse - Les Maths en tête* de Xavier Gourdon.