Agrégation interne : Intégrales à paramètres.

Pour se familiariser avec les théorèmes du cours.

`Exercice 1.` Sous réserve d'existence, on note pour tout n entier $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(1+x^2)}$.
1. Etudier pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'existence de I_n.
2. Etudier la limite de I_n.

`Exercice 2.`
1. Justifier que l'on définit bien une fonction $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ en posant

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\cos(tx)}{1+t^2+x^2} dt.$$

2. Calculer $F(0)$.
3. Etudier le signe de F et la monotonie de F (sans parler de dérivabilité).
4. Etudier la continuité de F.
5. Etudier la dérivabilité de F et exprimer sa dérivée en fonction d'une intégrale. Vérifier la réponse à la question **3** .

`Exercice 3.` En utilisant le développement en série de e^z, montrer l'égalité

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}.$$

`Exercice 4.`
1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction F :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(x\left(t+1\right)\right)}{\sqrt{t}\left(1+t^2\right)} dt.$$

2. Etudier la continuité de F sur son ensemble de définition.
3. Etudier la dérivabilité de F, et donner une expression intégrale de F'.

La technique de *localisation du paramètre.*

`Exercice 5.` Montrer que l'égalité

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\lambda x)}{x(1+x^2)}$$

définit bien une fonction sur $\mathbb{R}$, et que cette fonction est continue.
(On pourra faire varier le paramètre λ dans un intervalle plus petit que $\mathbb{R}$.)

Le minimum à savoir faire avec la fonction Gamma.

Exercice 6.

1. Etablir que $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $x > 0$. On appelle alors fonction Γ la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.

2. Donner une relation de récurrence entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (on pourra appliquer la méthode de l'exercice précédent).

4. Montrer que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner une expression de sa dérivée sous forme intégrale.

5. Etudier la convexité de la fonction Γ.

6. Justifier l'existence d'un réel $c \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$. (*Penser à un théorème du cours d'analyse.*) Préciser les variations de Γ.

7. Donner un équivalent simple de la fonction Γ au voisinage de 0.

8. Etudier les limites de la fonction Γ en 0 et en $+\infty$.

9. Dessiner l'allure du graphe de Γ.

Un grand classique mêlant intégrales et équations différentielles.

Exercice 7.

1. Déterminer les réels x pour lesquels l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$ est convergente. On note dans ce cas $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. Etudier la limite de f en $+\infty$.

4. Montrer que f est $\mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; f''(x) + f(x) = \frac{1}{x}$.

5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}dt$ est convergente. On note $g(x)$ sa valeur.

6. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et admet pour limite 0 en $+\infty$.

7. Montrer que g est également $\mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; g''(x) + g(x) = \frac{1}{x}$.

8. En déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

Du rab : encore un classique pour retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss.

Exercice 8.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ est convergente. L'objectif de l'exercice est de calculer la valeur de cette intégrale, dite intégrale de Gauss.

2. Justifier que l'on définit bien des fonctions f et g de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ en posant :

$$f(x) = \Big(\int_0^x e^{-t^2}dt\Big)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt.$$

3. Montrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et montrer que $f' + g'$ est nulle sur $\mathbb{R}^+$.

4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \; f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$.

5. Etudier la limite de g en $+\infty$.

6. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.

7. En déduire la valeur de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}dt$.

Rappel des théorèmes au programme pour les intégrales généralisées

Dans ce qui suit, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide (et pas forcément compact !).

Théorème 1. Soit (f_n) une suite de fonctions réelles ou complexes, continues par morceaux sur I. Si
• la suite de fonction (f_n) converge simplement vers une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, et si
• il existe une fonction $\phi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times I, \quad |f_n(t)| \leq \phi(t)$, **alors**
les fonctions f_n et f sont intégrables sur I, et on a

$$\int_I f_n(t)\ dt \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_I f(t)\ dt\ .$$

Théorème 2. Soit $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions réelles ou complexes, continues par morceaux sur I et intégrables sur I. Si
• la série de fonction $\sum_{n \geq n_0} f_n$ converge simplement vers une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, et si
• la série $\sum \int_I |f_n|$ converge **alors**
f est intégrable sur I, et on a

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\ dt = \int_I f(t)\ dt\ .$$

Théorème 3. Soit une fonction $f : X \times I \to \mathbb{C}$. Si
• pour tout $x \in X$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
• pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X et si
• il existe une fonction $\phi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall (x,t) \in X \times I, \quad |f(x,t)| \leq \phi(t)$, **alors**
la fonction g définie sur X par $g(x) = \int_I f(x,t)\ dt$ est continue sur X.

Théorème 4. On suppose cette fois que X est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit une fonction $f : X \times I \to \mathbb{C}$. Si
• pour tout $x \in X$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I,
• pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur X et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur X et si
• il existe une fonction $\phi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall (x,t) \in X \times I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \phi(t)$, **alors**
la fonction g définie sur X par $g(x) = \int_I f(x,t)\ dt$ est dérivable sur X et on a pour tout $x_0 \in X$ l'égalité

$$g'(x_0) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\ dt.$$