Equations différentielles de Bernoulli et de Sturm-Liouville.

Séance du 12 décembre 2014

La partie I est indépendante du reste du problème.

Partie I : résolution explicite d'une équation de Bernoulli

On appelle ici équation de Bernoulli une équation différentielle

$$y' + A(x)y + B(x)y^{\lambda} = 0 \quad (\mathcal{B})$$

où A et B sont des fonctions à valeurs réelles définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle non trivial I, avec $\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$[1] .

I.1 Montrer qu'une solution de $(\mathcal{B})$ qui s'annule en un point est en fait la fonction nulle.

I.2 Montrer qu'en posant $z = y^{1-\lambda}$ on se ramène à une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre.

I.3 A titre d'exemple on considère l'équation

$$y' - \frac{1}{x}y + \frac{e^x}{x}y^2 = 0 \quad (\mathcal{B}_0)$$

d'inconnue $y : I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}_+^*$. Vérifier qu'elle se ramène à l'équation $z' + \frac{1}{x}z = \frac{e^x}{x}$ et que cette dernière admet les solutions $\phi_\lambda : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définies par $x \mapsto \frac{\lambda + e^x}{x}$.

I.4 Etudier les fonctions $\psi_\lambda = \frac{1}{\phi_\lambda}$ sur leurs ensembles de définition, et représenter sur une même figure les courbes intégrales de $\mathcal{B}_0$.

Partie II

Dans cette partie, étant donné deux fonctions p et q de $\mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$, on désigne par $A_{p,q}$ l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ défini par

$$y \mapsto A_{p,q}(y) = y'' + py' + qy$$

[1]On pourrait également s'intéresser au cas où $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, et il faudrait dans ce cas faire attention aux valeurs prises par y. Plus généralement on s'intéresse au cas où A et B sont uniquement supposées continues (c'est par exemple ainsi que sont présentées les équations de Bernoulli dans le livre *Analyse numérique et équations différentielles* de Jean-Pierre Demailly, ou dans le tome 3 du cours de Mathématiques d'Arnaudiès et Fraysse

et par $(D_{p,q})$ l'équation différentielle sur $[0,1]$: $A_{p,q}(y)=0$.

II.1 Soit y une solution non identiquement nulle de $(D_{p,q})$.
II.1.a. Montre que les fonctions y et y' ne s'annulent pas simultanément.
II.1.b. Montre que les zéros de y sont en nombre fini. Indication : on pourra raisonner par l'absurde et considérer un point d'accumulation d'un ensemble infini de zéros de y.

II.2. Si y_1 et y_2 sont deux solutions de $(D_{p,q})$, on définit le wronskien W_{y_1,y_2} de y_1 et y_2 comme la fonction $W_{y_1,y_2}\ :\ [0,1]\to\mathbb{R}$ définie par l'égalité

$$\forall t\in[0,1],\ W_{y_1,y_2}(t)=\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix}$$

II.2.a. Dériver W_{y_1,y_2} puis former une équation différentielle simple vérifiée par W_{y_1,y_2}.
II.2.b. Montrer que le wronskien de deux solutions y_1 et y_2 de $(D_{p,q})$ est soit la fonction nulle, soit ne s'annule pas.
II.2.c. *Une utilisation du wronskien.* Dans cette question, on cherche à déterminer les solutions de l'équation $(2x-4)y''-(x^2-2)y'+(x^2-2x+2)y=0$ sur $[0,1]$. Après s'être ramené à une équation équivalente $(D_{p,q})$, calculer le wronskien d'un système fondamental de solution. Remarquer que $(D_{p,q})$ admet une fonction usuelle simple comme solution, et en déduire l'ensemble des solutions en utilisant le wronskien. Connaissez-vous une méthode n'utilisant pas le wronskien ?
II.2.d. Soit y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de $(D_{p,q})$; on suppose que y_1 admet au moins deux zéros, et on note a et b deux zéros consécutifs.
Montrer que y_2 admet au moins un zéro dans l'intervalle $]a,b[$.
II.2.e. La fonction y_2 peut-elle admettre plusieurs zéros dans l'intervalle $]a,b[$?

Etant donné deux fonctions u et v de $\mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$, u ne s'annulant en aucun point, on désigne par $B_{u,v}$ l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ défini par

$$B_{u,v}(y)=(uy')'+vy$$

et par $(E_{u,v})$ l'équation différentielle sur $[0,1]$: $B_{u,v}(y)=0$.
II.3.a. Soit y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de $(D_{p,q})$. Vérifier la relation

$$y_1B_{u,v}(y_2)-y_2B_{u,v}(y_1)=(u'-up)W_{y_1,y_2}.$$

II.3.b. Montrer que pour tout couple (p,q) il existe des couples (u,v) tels que $KerA_{p,q}=KerB_{u,v}$ et déterminer tous ces couples (u,v).
II.4 On se donne trois fonctions u,v_1,v_2 de $\mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ et on suppose que pour tout $x\in[0,1]$ on a les inégalités $u(x)>0$ et $v_2(x)<v_1(x)$. Pour $i\in\{1,2\}$ on note y_i une solution non identiquement nulle de l'équation (E_{u,v_i}) ; on suppose que y_2 admet au moins deux zéros et on note a et b deux zéros consécutifs.
II.4.a Vérifier la relation

$$[uy_1y_2']_a^b=\int_a^b(v_1(x)-v_2(x))\,y_1(x)y_2(x)dx.$$

(On pourra considérer $\int_a^b(y_1B_{u,v_2}(y_2)-y_2B_{u,v_1}(y_1))$.)
II.4.b Montrer que y_1 admet au moins un zéro dans l'intervalle $]a,b[$

Partie III

Dans toute la suite du problème on note r une fonction de $\mathcal{C}^{\infty}([0,1],\mathbb{R})$, et pour tout nombre réel λ on considère l'équation différentielle sur $[0,1]$ suivante

$$y'' + (\lambda - r)\, y = 0. \quad (D_\lambda)\ .$$

On note y_λ l'unique solution de (D_λ) satisfaisant $y_\lambda(0) = 0$ et $y'_\lambda(0) = 1$, et E_λ l'espace vectoriel (éventuellement réduit à zéro) des solutions de (D_λ) satisfaisant $y(0) = y(1) = 0$. Si cet espace n'est pas réduit à zéro, on dit que λ est valeur propre.

III.1.a. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\dim E_\lambda \in \{0,1\}$.
III.1.b. Démontrer que pour $\lambda \in \mathbb{R}$ il y a équivalence entre $E_\lambda \neq \{0\}$ et $y_\lambda(1) = 0$.

III.2.a. Démontrer que toute valeur propre est strictement supérieure à $\inf_{x\in[0,1]} r(x)$.
III.2.b. Montrer que si $y_1 \in E_{\lambda_1}$ et $y_2 \in E_{\lambda_2}$, avec deux réels distincts λ_1 et λ_2, alors $\int_0^1 y_1(x)y_2(x)dx = 0$. (On pourra considérer l'opérateur $\Phi : E_\lambda \to \mathcal{C}^{\infty}([0,1],\mathbb{R})$ défini par $y \mapsto y'' - ry$ et étudier $\int_0^1 \Phi(y_1)y_2$.)

Partie IV

Dans cette partie on désigne par $N(\lambda)$ le nombre de zéros de la fonction y_λ dans $[0,1]$, et on se propose d'étudier $N(\lambda)$. On désigne par $E(a)$ la partie entière d'un réel a.

IV.1. Dans cette question on examine le cas où $r = 0$ et $\lambda > 0$.
IV.1.a. Calculer $y_\lambda(x)$ pour $x \in [0,1]$.
IV.1.b. Calculer $N(\lambda)$.
IV.1.c. Préciser le comportement de $N(\lambda)$ au voisinage d'un point λ_0.

Dans ce qui suit on ne suppose plus $r = 0$ ni $\lambda > 0$. On admettra que la fonction de deux variables $(x,\lambda) \mapsto y_\lambda(x)$ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$.

IV.2. Dans cette question on se propose de montrer que si $y_{\lambda_0}(1)$ est non nul, alors $N(\lambda)$ est constant dans un voisinage de λ_0.
On désigne par $c_1, \ldots, c_n$ les zéros de y_{λ_0} dans $[0,1]$ avec $0 = c_1 < c_2 < \ldots < c_n < 1$.
IV.2.a. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(\xi_j)_{0\le j\le 2n}$ de nombres réels possédant les propriétés suivantes :
(i) $\xi_0 = 0$, $\xi_{2n} = 1$, $0 < \xi_1 < \xi_2$ et $\forall j \in \{2,\ldots,n\}$, $\xi_{2j-2} < c_j < \xi_{2j-1}$
(ii) pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$ on a $(-1)^{j+1}y_{\lambda_0} > 0$ sur $[\xi_{2j-1}, \xi_{2j}]$ et
(iii) pour tout $j \in \{0,\ldots,n-1\}$ on a $(-1)^{j}y'_{\lambda_0} > 0$ sur $[\xi_{2j}, \xi_{2j+1}]$.
IV.2.b. Montrer que pour tout λ suffisament voisin de λ_0, y_λ a exactement un zéro dans chacun des intervalles $[\xi_{2j}, \xi_{2j+1}]$, mais n'en a aucun dans les intervalles $[\xi_{2j-1}, \xi_{2j}]$. Conclure.
IV.2.c. On note $\rho = \sup_{x\in[0,1]} r(x)$. Montrer que pour tout $\lambda \ge \rho$ on a

$$N(\lambda) \ge E\left(\frac{\sqrt{\lambda-\rho}}{\pi}\right).$$

On pourra utiliser la question II.4 et la question IV.1 en y remplaçant λ par un réel quelconque $\mu < \lambda - \rho$.

Sources

◇ L'exercice de la partie I est (rapidement) construit à partir a partie des explications détaillées que l'on trouve dans le *cours d'Analyse - Tome 4* de Jean-Marie Monier dans la collection *J'intègre.* On trouve par exemple un autre exemple détaillé et des explications générales dans le *cours de Mathématiques - Tome 4* de Jean-Marie Arnaudiès et Henri Fraysse chez Dunod.

◇ Le problème, à partir de la partie II, est très fortement inspiré du sujet de l'X MP 2008.

◇ La théorie des équations de Sturm-Liouville est très classique et peut se décliner à loisir pour l'oral. Parmi de nombreuses références possibles, on peut citer *Exercices de mathématiques pour l'agrégation - Analyse 3* d'Antoine Chambert-Loir et Stéfane Fermigier, le livre *Oraux X-ENS Analyse 4* de Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas, le livre de Xavier Gourdon *Les maths en tête - Analyse*, le livre *Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation* de Stéphane Gonnord et Nicolas Tausel...