Quelques théorèmes du point fixe et quelques applications.

Séances des 25 septembre et 2 octobre 2015

Considérant une fonction $f : X \to X$, on appelle point fixe de f tout élément x de X tel que $f(x) = x$. On a l'habitude d'appeler théorème du point fixe un théorème qui assure l'existence (et parfois l'unicité) d'un point fixe en fonction d'hypothèses sur f et X. Ces théorèmes ont de nombreuses applications, en particulier en calcul différentiel, pour la théorie des équations différentielles, ainsi que pour la résolution numérique d'équations.

Si X est une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|_E)$, on dit que f est contractante s'il existe $k \in [0,1[$ tel que $\forall (x,y) \in X^2,\ \|f(x) - f(y)\|_E \leqslant k\|x-y\|_E$. Dans la partie **I**, la fonction f est une fonction réelle, et la dernière condition se traduit simplement par l'existence de $k \in [0,1[$ tel que $\forall (x,y) \in X^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y|$.

Dans tout le problème a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.

Partie I - Fonctions réelles -

I.1.a. Montrer qu'une fonction continue $f : [a,b] \to [a,b]$ admet au moins un point fixe.
I.1.b. Montrer qu'une fonction croissante $f : [a,b] \to [a,b]$ admet au moins un point fixe.

I.2. On souhaite démontrer la version suivante du théorème du point fixe de Picard :

> **Théorème 1 :** Soit I un intervalle fermé non vide de $\mathbb{R}$, et $f : I \to I$ une fonction contractante.
>
> La fonction f admet un unique point fixe qui est limite de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme $x_0 \in I$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$.

I.2.a. On se place sous les hypothèses du Théorème 1. Montrer que f admet au plus un point fixe.
I.2.b. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme dans l'énoncé du Théorème 1. Montrer que (x_n) est de Cauchy puis conclure.
I.2.c. On note x le point fixe de f. Donner une majoration de $|x_n - x|$ en fonction de n, k et $|x_1 - x_0|$. Comment appelle-t-on une telle convergence ?
I.2.d. Peut-on remplacer l'hypothèse de contraction du Théorème 1 par l'hypothèse $\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| < |x-y|$?

I.3.a. Point fixe attractif. On considère un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On suppose qu'un élément ℓ de I est point fixe de f, et que $|f'(\ell)| < 1$. Montrer qu'il existe un voisinage J de ℓ dans I tel que pour tout $x_0 \in J$ la suite de terme général $f^n(x_0)$ converge vers ℓ.
I.3.b. Point fixe répulsif. On suppose qu'une fonction f vérifie les mêmes hypothèses, avec pour différence $|f'(\ell)| > 1$. Montrer qu'il existe un voisinage J de ℓ dans I tel que pour $b \in J$, si la suite de terme général $f^n(b)$ converge vers ℓ alors elle est stationnaire.

I.4. Une application géométrique. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal on considère un triangle non dégénéré ABC avec B et C sur l'axe des abscisses. Pour tout point M sur l'axe des abscisses on considère P_M le projeté orthogonal de M sur la droite AC, Q_M le projeté orthogonal de P_M sur la droite AB et R_M le projeté orthogonal de Q_M sur la droite BC. Ce procédé induit une application $\phi \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à l'abscisse de M associe celle de R_M. On appelle a, b et c les mesures respectives des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$.
I.4.a. Montrer que pour deux points distincts M et M' de BC on a les égalités

$$\frac{P_M P_{M'}}{MM'} = \frac{P_M C}{MC} = |\cos(c)| \, .$$

I.4.b. Démontrer qu'il existe un unique point M sur la droite BC tel que $R_M = M$.

I.5. Une variante utile et célèbre. Il arrive qu'on ait maille à partir avec une fonction non contractante mais dont une des itérée le soit. La variante suivante du Théorème 1 est alors utile :

> **Théorème 2 :** Soit I un intervalle fermé et non vide de $\mathbb{R}$, et une fonction $f \ : \ I \to I$. On suppose qu'il existe un entier p tel que la composée $f^p = f \circ f \circ \ldots \circ f$ soit contractante.
>
> La fonction f admet alors un unique point fixe qui est limite de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme $x_0 \in I$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$.

I.5.a. Pour cette question **I.5.** on se place sous les hypothèses du Théorème 2. Montrer que f admet au plus un point fixe.
I.5.b. Montrer l'existence d'un point fixe ℓ de f.
I.5.c. Montrer que toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme dans l'énoncé converge vers ce point fixe ℓ. On donnera si possible une majoration de la forme $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - \ell| \leqslant C.q^n$ avec C et q des constantes que l'on précisera.

Partie II - Dans un espace vectoriel normé -

II.1. Que faut-il changer[1] dans les démonstrations précédentes pour prouver le théorème suivant ?

> **Théorème 3 :** Soit X une partie fermée et non vide d'un espace vectoriel complet $(E, \|.\|_E)$ et $f \ : \ X \to X$ une fonction contractante (ou telle qu'une de ses itérées f^p soit contractante).
>
> La fonction f admet un unique point fixe qui est limite de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme $x_0 \in I$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$.

II.2. Donner le nombre de solutions dans $\mathbb{R}^2$ du système d'équations $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\sin(x+y)}{2} \\ y = \frac{\cos(x-y)}{2} \end{array} \right.$.

II.3. Montrer que toute similitude affine d'un espace affine euclidien (de dimension finie) de rapport différent de 1 admet un unique point fixe.

II.4. On souhaite maintenant affaiblir l'hypothèse sur la *fonction contractante* dans le cas où la partie laissée stable par la fonction est compacte. Précisément on souhaite montrer le théorème suivant :

[1] On rencontre rarement une telle question dans un problème de concours ! Dans une épreuve, on aurait sans doute énoncé le Théorème 3 immédiatement.

Théorème 4 : Soit K une partie compacte et non vide d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|_E)$ et $f\ :\ K \to K$ une fonction vérifiant

$$\forall (x,y) \in K^2,\ x \neq y \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_E < \|x-y\|_E.$$

La fonction f admet un unique point fixe qui est limite de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme $x_0 \in I$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$.

II.4.a. On se place selon les hypothèses du Théorème 4. Démontrer l'existence et l'unicité d'un point fixe ℓ. On pourra montrer qu'une fonction bien choisie admet un minimum.
II.4.b. Montrer que toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme dans l'énoncé converge vers ℓ. On pourra étudier la monotonie de la suite $\|x_n - \ell\|_E$.

Partie III - Equation(s) intégrale(s) de Fredholm et Volterra -

Dans cette partie on considère deux fonctions $y \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $k \in \mathcal{C}([a,b]\times[a,b],\mathbb{R})$, ainsi que M le maximum de la fonction $|k|$ sur $[a,b]\times[a,b]$. On se pose la question de l'existence de fonctions $x \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ vérifiant les équations

$$\forall t \in [a,b],\ x(t) - \int_a^b k(s,t)x(s)ds = y(t) \qquad \textbf{(F)}$$

$$\text{et } \forall t \in [a,b],\ x(t) - \int_a^t k(s,t)x(s)ds = y(t) \qquad \textbf{(V)}.$$

III.1. Montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ est complet.

III.2.a. Montrer que si $(b-a).M < 1$ alors l'équation **(F)** admet une unique solution.
III.2.b. Résoudre le cas particulier de l'équation **(F)** lorsque la fonction k est constante égale à un réel λ. On discutera selon les valeurs de λ.

III.3.a. On note T l'application qui à $x \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ associe la fonction $T(x)\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in [a,b],\ T(x)(t) = y(t) + \int_a^t k(s,t)x(s)ds$. Montrer que T est à valeurs dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
III.3.b. Montrer que pour tout $(x_1,x_2) \in (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}))^2$, $t \in [a,b]$ et pour tout entier n on a $|T^n(x_1)(t) - T^n(x_2)(t)| \leq \frac{(t-a)^n M^n}{n!}\|x_1 - x_2\|_\infty$.
III.3.c. Montrer que l'équation **(V)** admet une unique solution (on ne prend pas de condition sur M cette fois !).

Partie IV - Application à l'analyse numérique matricielle -

Dans cette partie on considère un entier $n > 1$. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on confond A et l'application linéaire qui lui est canoniquement associée.

IV.1. Trouver dans chacun des cas suivants une norme de $\mathbb{R}^n$ pour laquelle A est contractante

$$\textbf{a}.\text{ lorsque } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}^2 < 1$$

$$\textbf{b}.\text{ lorsque } \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}| < 1 \text{ et}$$

c. lorsque $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |A_{i,j}| < 1$.

IV.2. Pour $b \in \mathbb{R}^n$ on considère l'équation

$$Ax = b \qquad \textbf{(E)}$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}^n$.

IV.2.a. Montrer que si

$$\left(\sum_{i=1}^{n} A_{i,i} \right)^2 > (n-1) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2$$

alors **(E)** admet une unique solution x^* et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que toute suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ définie par son premier terme x_0 et l'égalité $\forall m \in \mathbb{N},\ x_{m+1} = (\lambda A + I_n) x_m - \lambda b$ converge vers x^*.

IV.2.b. Préciser quelles valeurs de λ on peut prendre pour avoir la convergence annoncée.

1 Indications à utiliser après une première recherche.

I.1.a. Une possibilité est d'introduire une fonction intermédiaire bien choisie, et de lui appliquer un théorème célèbre. Remarquer que tous les outils sont au programme de TS. On trouve l'exercice (parfois guidé) dans certains manuels. (Par ex. dans le *Math'x*, page 59).

I.1.b. Pas si simple... voire par simple du tout !
Une figure donne envie de regarder l'ensemble $E = \{x \in [a,b] \mid f(x) > x\}$ puis d'en considérer la borne supérieure.

I.2.b On pourra commencer par donner une majoration de $|u_{m+1} - u_m|$ en fonction de $u_1 - u_0$, puis d'utiliser cette majoration pour majorer $|u_{n+p} - u_p|$.

I.2.d On pourra considérer la fonction $g \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = t + \pi/2 - \arctan(t)$ ou encore $g(t) = \sqrt{1+t^2}$.

I.3.a. On peut chercher à appliquer le Théorème 1 sur un intervalle $J = [\ell - \alpha, \ell + \alpha]$ avec α bien choisi (de sorte que f soit contractante sur J).

I.5.b. On peut commencer par considérer un point fixe x de f^p.
On a alors envie que x soit point fixe de f !

I.5.c. On connaît déjà un résultat sur la convergence de la suite $(x_{pm})_{m\in\mathbb{N}}$.
Une idée pourrait être de s'y ramener, en trouvant pour tout entier n des entiers m et et q tels que $n = mp + q$, avec q borné...

II.4.a. On a $f(\ell) = \ell$ si et seulement si $x \mapsto \|f(x) - x)\|_E$ s'annule en ℓ.
Que peut-on dire d'une fonction continue sur un compact ?

II.4.b. Après avoir montré que la suite de terme général $\|x_n - \ell\|_E$ converge vers un réel λ on peut être tenté d'utiliser la compacité de K pour extraire une suite $\left(x_{\phi(n)}\right)$ convergente, et manipuler $x_{\phi(n)+1} - \ell$.

III.1 C'est une question classique, qui relève du cours. Que faut-il montrer au juste ?

III.2.a. Il doit y avoir un lien avec le théorème du point fixe...
...sentiment renforcé par la présence de la question **III.1** !
Essayons alors de traduire l'équation **(F)** en termes de point fixe.

III.2.b. On peut remarquer que si l'équation est vérifiée, nécessairement $x(t)$ est de la forme $x(t) + C$ où C est une constante. Reste à déterminer pour quelles constantes C la fonction $t \mapsto x(t) + C$ est solution.

2 Sources.

⋄ L'exercice **I.1.a.** se retrouve dans un très grand nombre de livres.

⋄ L'exercice **I.1.b.** est moins fréquent, mais se retrouve quand même assez facilement : dans le livre *Mathématiques supérieures Analyse* de Jacques Moisan, Françoise Chanet, Frédérique Delmas et Nicolas Tosel, dans le livre *Oraux X-ENS Analyse 1* de Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas, dans le premier tome d'*exercices d'Analyses corrigés* de Jean-Marie Arnaudiès, Henri Fraysse et Pierre Delezoide...

⋄ Le théorème classique correspondant à la question **I.2** est traité dans tout livre de Sup ou de première année. La question **I.5.** est de même très fréquente (voir par exemple *Les Maths en tête - Analyse* de Xavier Gourdon).

⋄ Les résultats des questions **I.3.a.** et **I.3.b.** sont eux aussi très classiques. On peut trouver des énoncés et des démonstrations claires sur ces points dans le livre *Mathématiques supérieures Analyse* de Jacques Moisan, Françoise Chanet, Frédérique Delmas et Nicolas Tosel.

◇ L'application de la question **I.4.** provient du sujet CCP 2009.

◇ L'exemple de la question **II.2.** est tiré du *Petit Guide de Calcul Différentiel* écrit par François Rouvière. Remarque que dans cet exemple, on peut remplacer les fonctions sin et cos par n'importe quelles fonctions 1-lipschitziennes. D'autres exemples et des méthodes sont donnés dans le chapitre IV "Méthodes itératives pour la résolution d'équations" du livre *Analyse numérique et équations différentielles* écrit par Jean-Pierre Demailly.

◇ On peut retrouver la question **II.4.** traitée dans le livre *Analyse à une variable réelle* écrit par Alain Tissier et Jean-Noel Mialet (exercice 109 du chapitre VI), ou encore dans les ouvrages *Oraux X-ENS Analyse 1* ou le *Petit Guide de Calcul Différentiel* .

◇ La partie **III** propose une application des théorèmes de point fixe aux équations intégrales de Fredholm et Volterra. On peut trouver de tels exemples dans le *Petit Guide de Calcul Différentiel.*

◇ La partie **IV** est tirée du sujet ENSAE 95.