Séries entières et séries de Dirichlet.

Séances des 27 novembre et 4 décembre 2015

Quand le contexte est clair, on notera $\sum u_n(x)$ la série de fonctions $\sum_{n\geq n_0} u_n(x)$ avec n_0 un entier fixé à l'avance. On appelle série entière une série de fonctions complexes $\sum a_n x^n$ où $(a_n)_{n\geq n_0}$ est une suite de nombres complexes. On se pose naturellement la question du domaine de convergence d'une telle série. On propose de **redémontrer** dans ce problème quelques résultats classiques sur la convergence des séries entières en général, et d'étudier en particulier la convergence et quelques propriétés de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

Dans la troisième partie du problème, on étudie les premières propriétés de convergence des séries de Dirichlet. Ces séries jouent un rôle important en théorie des nombres.

Partie I - Séries entières -

1. Bien que les deux résultats de cette question doivent leur nom à Niels Abel, ils sont indépendants.
1.a. *Un lemme d'Abel.* Soit $(a_n)_{n\geq n_0}$ une suite de nombres complexes, et $x_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $(a_n x_0^n)$ soit bornée. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < |x_0|$ la série $\sum a_n x^n$ converge absolument.
1.b. *Transformation d'Abel.* On considère deux suites complexes $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$. Pour $n \geq n_0$, on note $s_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$. Montrer que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n_0 \leq p \leq q$ on a :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k v_k \;=\; s_q v_q - s_{p-1} v_p + \sum_{k=p}^{q-1} s_k (v_k - v_{k+1})$$

1.c. *Une deuxième transformation d'Abel.* On considère deux suites complexes $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ et on suppose que la série $\sum u_n$ converge. Pour $n \geq n_0$, on note $\rho_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$. Montrer que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n_0 + 1 \leq p \leq q$ on a :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k v_k \;=\; \rho_p v_p - \rho_{q+1} v_q + \sum_{k=p+1}^{q} \rho_k (v_k - v_{k-1}).$$

2. Etant donnée une série entière $\sum a_n x^n$, on considère les ensembles :

$$E_1 \;=\; \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ est bornée }\},$$

$$E_2 \;=\; \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ converge vers } 0\},$$

$$E_3 \;=\; \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \sum a_n r^n \text{ converge }\} \text{ et}$$

$$E_4 \;=\; \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \sum a_n r^n \text{ converge absolument}\}.$$

Rappeler les inclusions entre ces ensembles, puis montrer qu'ils admettent une même borne supérieure dans $[0, +\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Cette borne supérieure est appelée rayon de convergence de la série entière et est souvent notée R.

3.a. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes non nuls telle que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ converge

vers un réel ℓ. Montrer que si $\ell < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge, alors que si $\ell > 1$ la série $\sum u_n$ diverge. Montrer que si $\ell = 1$, il peut y avoir convergence ou divergence de la série $\sum u_n$.
3.b. On considère une série entière $\sum a_n x^n$ telle que les coefficients a_n soient non nuls pour $n \geq n_0$. On suppose que $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ converge vers $R \in [0, +\infty]$. Montrer que R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

4.a Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Montrer que $s(x) = \sum a_n x^n$ converge uniformément sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon $R' < R$. Que peut-on en déduire relativement à la continuité de s ?
4.b Montrer que sous les mêmes hypothèses, il y a convergence uniforme de la série entière sur tout compact inclus dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon R.

5.a. Donner un exemple de série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ qui converge en tout point du cercle de centre 0 et de rayon R.
5.b. Donner un exemple de série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ qui diverge en tout point du cercle de centre 0 et de rayon R.

6.a. On fixe un réel θ. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum \cos(n\theta) x^n$.
6.b. On considère la suite d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'entier a_n soit le nombre de chiffres 8 dans l'écriture de n en base 10. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Partie II - Première étude de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ -

II.1. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$. On notera $s(x)$ la somme de cette série lorsqu'elle est définie.

II.2. Etudier la convergence de la série en 1 et en -1.

II.3. Etudier la limite de $s(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieurs.

II.4.a. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ on a convergence de s en $e^{i\theta}$.
II.4.b. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, l'application $\sigma\ :\ [0,1] \to \mathbb{C}$ qui à t associe $s(te^{i\theta})$ est continue.

II.5. Dans cette question on considère une fonction ϕ définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$, continue, réelle, décroissante et strictement positive. On suppose que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \phi(t)dt$ est convergente.
II.5.a. Montrer que pour tout $h > 0$ la série $\sum h\phi(nh)$ est convergente.
II.5.b. Calculer la limite de $\sum_{n=1}^{+\infty} h\phi(nh)$ lorsque h tend vers 0 par valeurs supérieurs.

II.6. Dans cette question on considère la restriction de s à l'intervalle $[0, 1[$, restriction que l'on notera s également.
II.6.a. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ est convergente.
II.6.b En considérant la fonction $\phi(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ montrer que $s(x)$ est équivalent à $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}$ lorsque x tend vers 1. On pourra utiliser librement l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \ = \ \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

II.7.a. Déterminer l'ensemble des valeurs du nombre complexe x pour lesquelles l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{du}{e^{u^2} - x}$

est convergente. Lorsqu'elle l'est, on pose

$$g(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{e^{u^2} - x}.$$

II.7.b. Montrer que s et g coïncident sur le disque ouvert $|x| < 1$.

Partie III - Convergence uniforme des séries entières -

III.1. Dans cette question on considère $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. On pose $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ et $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. On souhaite montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) la série converge uniformément sur $\overline{D}$,
ii) la série converge uniformément sur D,
iii) la série converge uniformément sur U.

III.1.a. Montrer que *ii)* implique *iii)*.
III.1.b. Montrer que *iii)* implique *i)*. Dans ce but, on pourra introduire le reste $\rho_N(\theta) = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n e^{in\theta}$.

Partie IV - Séries de Dirichlet -

Dans cette partie, le contexte est le suivant : on considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres complexes et une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strictement croissante de réels strictement positifs, telle que (λ_n) diverge vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction $u_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\forall z \in \mathbb{C},\ u_n(z) = a_n e^{-\lambda_n z}$. On note

$$I_C = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum u_n(x) \text{ converge } \}$$

et

$$I_A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum |u_n(x)| \text{ converge } \}.$$

Lorsque I_C est non vide minorée, on pose $\gamma = \inf I_C$. De même, lorsque I_A est non vide minorée, on pose $\delta = \inf I_A$.

IV.1. Déterminer I_A, I_C puis éventuellement γ et δ dans les cas suivants :
IV.1.a. $a_n = n^\alpha$ et $\lambda_n = n$, pour tout entier $n \geq 1$, et pour un réel α fixé.
IV.1.b. $a_n = 1$ et $\lambda_n = \ln(n)$ pour tout entier $n \geq 1$.
IV.1.c. $a_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n(n+1)}$ et $\lambda_n = \ln(n)$ pour tout entier $n \geq 1$.

IV.2. On suppose que I_A est non vide et minorée. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $\Re(z) > \delta$, alors $\sum u_n(z)$ est absolument convergente. Décrire I_A.

IV.3. On suppose dans cette question **III.3.** que pour tout $n \geq 2$ on a $\lambda_n = \ln(n)$. On suppose également que I_A et I_C sont non vides et minorées.
IV.3.a. Montrer que $\gamma \leq \delta \leq \gamma + 1$.
IV.3.b. Donner un exemple pour lequel $\gamma = \delta$.
IV.3.c. Donner un exemple pour lequel $\gamma + 1 = \delta$.
IV.3.d. Montrer qu'il est possible d'obtenir $\gamma < \delta < \gamma + 1$.

IV.4. L'objectif de cette question est de démontrer que si pour $z_0 \in \mathbb{C}$ on a $\sum u_n(z_0)$ qui converge, alors la série $\sum u_n(z)$ converge uniformément sur tout ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z - z_0) \leq \theta_0\}$ où θ_0 est un élément de $[0, \pi/2[$.

IV.4.a. Montrer qu'il suffit de montrer la propriété dans le cas où $z_0 = 0$, et qu'il est également suffisant de considérer le cas où $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$.
IV.4.b. On suppose qu'un nombre complexe z a pour écriture algébrique $z = x + iy$ avec $x > 0$. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ on a

$$\left| e^{-za} - e^{-zb} \right| \leq \frac{|z|}{x} \left(e^{-xa} - e^{-xb} \right).$$

IV.4.c. Montrer le résultat souhaité.
IV.4.d. Que peut-on déduire de ce qui précède à propos de la continuité de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$?
IV.4.e. On suppose que I_C est non vide et minoré : décrire I_C.

1 Indications à utiliser après une première recherche.

I.6.a.	Normalement vous devriez avoir du mal à utiliser le critère de D'Alembert... Au fait, se peut-il que la suite $(\cos(n\theta))$ converge vers 0 ?
I.6.b.	On peut essayer de majorer (a_n). En minorant on n'obtient pas grand chose... mais il se passe quelque chose une infinité de fois.
II.3.	On pourra comparer les coefficients de la série entière s à ceux d'une série dont on connaît une expression simple.
II.4.a.	Un bon outil est la transformation d'Abel...
II.4.b.	Devinez quel est le bon outil ?
II.5.a.	On reconnaît une méthode de comparaison entre série et intégrale : on peut commencer par donner pour tout $h > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ un encadrement de $h\phi(nh)$ par deux intégrales.
II.7.b.	On peut essayer d'obtenir un développement en série de l'intégrande.
III.1.a.	On peut utiliser le critère de convergence uniforme de Cauchy.
III.1.b.	On peut appliquer une transformation rappelant celle donnée en **I.1.b.** mais faisant apparaître ρ_n plutôt que s_n.
IV.3.d.	On peut considérer $a_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ pour $n \geq 2$.
IV.4.b.	On peut commencer par exprimer $e^{-za} - e^{-zb}$ comme une intégrale.
IV.4.c.	A nouveau, une clé possible est d'utiliser une transformation d'Abel.

2 Sources.

⋄ Dans l'ensemble, la partie **I** est proche de nombreux cours classiques sur les séries entières.

⋄ Les exercices de calcul de rayons de convergence du type des questions **I.5.a.** et **I.5.b.** sont légions. On en trouvera par exemple dans les livres de Jean-Marie Monier. Signalons par exemple le suivant qui est consistant tout en restant raisonnable : le *h)* de l'exercice 1 du chapitre II.1 proposé dans le Tome III (*compléments d'Analyse*) du cours de Jean-Marie Arnaudiès et Henri Fraysse . Il est corrigé dans le livre *Oraux X-ENS Analyse 2* de Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas.

⋄ La partie **II** sur l'étude de la série entière $\sum x^n/\sqrt{n}$ est inspirée du sujet de Polytechnique MP de 1991.

⋄ Le théorème de convergence radiale d'Abel évoqué à la question **II.** se retrouve à la limite de nombreux cours de Spé, ou comme exercice. Un prolongement naturel est l'exercice 10 du chapitre *Séries entières* du livre *Analyse - les Maths en tête* de Xavier Gourdon, que l'on retrouve également dans la section 26.1.7 du *Cours d'Analyse* d'Alain Pommellet. Dans le même esprit, on peut voir l'exercice 11 du chapitre III du Tome III (*compléments d'Analyse*) d'Arnaudiès et Fraysse .

⋄ La partie **III** est donnée sous forme d'exercice dans le livre *Oraux X-ENS Analyse 2* .

⋄ La partie **IV** est très fortement inspirée du sujet de Centrale Supelec PSI de 1997. Dans le même esprit, on peut consulter le sujet de l'ENS Cachan de 2010 (concours d'entrée en troisième année), ou celui du concours des Mines MP 2007. Le sujet de l'agrégation externe d'analyse de 1989 aborde également les séries de Dirichlet.

⋄ La question **IV.4.** est une belle application de la transformation d'Abel qui peut être abordée de façon complètement indépendante du reste de cette partie (et même de ce problème) pour illustrer ou mettre en oeuvre des techniques de convergence uniforme. Il s'agit d'une question ou d'un exercice assez classique, que l'on retrouve par exemple au début du sujet de Polytechnique M' de 1990, dans le MethodiX d'Analyse de Xavier Merlin, et à nouveau dans le livre *Oraux X-ENS Analyse 2* .