Endomorphismes cycliques et commutant.

Séance du 18 novembre 2016

Notations

1) Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n supérieure ou égale à 2, $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E, I_E l'élément de $\mathcal{L}(E)$ défini par $\forall x \in E,\ I_E(x) = x$ et $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties de E c'est-à-dire $\mathcal{H} = \{\lambda.I_E \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.
2) Pour un endomorphisme u de E, on note :
   - $u^0 = I_E$ et $u^p = u \circ u^{p-1}$ pour tout entier $p \geqslant 1$
   - $C(u)$ (appelé commutant de u) la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes v de E commutants avec u c'est-à-dire tels que $u \circ v = v \circ u$.
   - χ_u le polynôme caractéristique de u.
   - pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ défini par $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k X^k$, $P(u)$ désigne l'endomorphisme de E défini par $P(u) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k u^k$
   - pour tout vecteur x de E, $E_u(x)$ désigne le sous-espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs $\{u^p(x) \mid p \in \mathbb{N}\}$.
   - un endomorphisme u de E est dit cyclique s'il existe un vecteur x de E tel que $E_u(x) = E$
3) Si $\mathcal{A}$ est une partie non vide de $\mathcal{L}(E)$, on note $C(\mathcal{A}) = \{v \in L(E) \mid \forall u \in \mathcal{A},\ v \circ u = u \circ v\}$.
   Enfin, pour une matrice A de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A.B = B.A\}$ (appelé commutant de la matrice A).

Les candidats pourront admettre et utiliser le résultats suivant :

- Soit $\mathcal{B}$ une base de E ; pour un endomorphisme u de E, soit $M(u, \mathcal{B})$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
  Alors, un endomorphisme v appartient au commutant de u si et seulement si $M(v, \mathcal{B})$ appartient au commutant de $M(u, \mathcal{B})$ et l'application $v \mapsto M(v, \mathcal{B})$ est un isomorphisme entre ces deux algèbres.

Un résultat préliminaire

Redémontrer que pour tout $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n$ le déterminant $V(\lambda_1, .., \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ | & | & | & | & | \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$ est nul si et seulement s'il existe un couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $\lambda_i = \lambda_j$.

Partie I

Un des objectifs de cette partie est de redémontrer le théorème de Cayley-Hamilton : on ne peut donc pas l'utiliser !

1) Soit x un vecteur de E et u un endomorphisme de E.
   a) Montrer que $E_u(x)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E, contenant x et stable par u.
   b) Soit $x \neq 0$; on pose $\dim E_u(x) = k$. Montrer que $k \geqslant 1$ et que $\{u^i(x) \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\}$ est une base de $E_u(x)$.
   c) Caractériser au moyen de la dimension de $E_u(x)$ les vecteurs propres de u.
2) On suppose que u est un endomorphisme cyclique. Soit alors $x_0 \in E$ tel que $\{u^i(x_0) \mid 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$ soit une base de E.

a) Montrer que $\{u^i \mid 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$ est une partie libre de $\mathcal{L}(E)$.

b) Soit v et w deux éléments de $C(u)$. Montrer que $v = w$ si et seulement si $v(x_0) = w(x_0)$.

c) Montrer que $\{u^i \mid 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$ est une base de $C(u)$

d) On pose $u^n(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)$ où $a_k \in \mathbb{K}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

- Calculer le polynôme caractéristique χ_u de u à l'aide des coefficients $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$.
- En déduire que $\chi_u(u) = 0$.

3) Dans cette question u est un endomorphisme quelconque de E.

a) Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u et soit v l'endomorphisme de F induit par u. Montrer que χ_v divise χ_u. En déduire que $\operatorname{Ker} \chi_v(u)$ est inclus dans $\operatorname{Ker} \chi_u(u)$.

b) Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que u induit sur le sous-espace $E_u(x)$ un endomorphisme cyclique de $E_u(x)$.

c) Montrer que $\chi_u(u)$ est l'endomorphisme nul.

4) a) Soit u un endomorphisme de E tel que $\forall x \in E,\ \dim(E_u(x)) \leqslant 1$. Montrer que u est une homothétie de E.

b) *Application* : Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathcal{L}(E)$ satisfaisant la propriété :

$$\forall x \in E \setminus \{0\},\ \exists f \in \mathcal{A},\ \exists \alpha \in \mathbb{K},\ \mid \operatorname{Ker}(f - \alpha I_E) = \mathbb{K}.x$$

(où $\mathbb{K}.x$ désigne la droite vectorielle engendrée par x). Montrer que $C(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$.

c) En déduire que $C(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$ dans les 2 cas suivants :

(i) lorsque $\mathcal{A} = GL(E)$ ou

(ii) lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; E est un espace euclidien et $\mathcal{A}$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

Partie II

Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E, $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ les valeurs propres distinctes de u dans $\mathbb{K}$ et $(r_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ leur ordre de multiplicité.

1) On suppose que $p = n$. Montrer que u est cyclique.

2) Dans cette question, on suppose que u est diagonalisable.

a) Montrer que v appartient à $C(u)$ si et seulement si v laisse stable tous les sous-espaces propres de u.

b) En déduire que $\dim C(u) = \sum\limits_{i=1}^{p} r_i^2$.

c) Montrer que $(u - \lambda_1 I_E) \circ (u - \lambda_2 I_E) \circ .. \circ (u - \lambda_p I_E) = 0$. En déduire que si $(I_E, u, .., u^{n-1})$ est une famille libre, u a n valeurs propres dans $\mathbb{K}$ deux à deux distinctes.

d) Déduire des résultats précédents que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) u est cyclique ;

(ii) $\{I_E, u, .., u^{n-1}\}$ est une famille libre ;

(iii) u admet n valeurs propres dans $\mathbb{K}$ deux à deux distinctes et

(iv) $\dim C(u) = n$

3) Dans cette question, on suppose u cyclique.

a) Monter que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $rang(u - \lambda I_E) \geqslant n - 1$.

b) En déduire que u est diagonalisable si et seulement si u admet n valeurs propres dans $\mathbb{K}$ deux à deux distinctes.

4) *Application.* On fixe un entier $k \geq 2$, et on note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre k $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ telles que la somme des éléments de chaque ligne soit constante, et également égale à la somme des éléments de chaque colonne. Pour $A \in \mathcal{M}$ on note $\alpha(A)$ la valeur commune de ces sommes.
Soit J l'élément de $\mathcal{M}$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

a) Montrer que $\mathcal{M}$ est le commutant de J et que α est une forme linéaire sur $\mathcal{M}$.

b) Donner $\dim \mathcal{M}$.

c) Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant k} \in \mathcal{M}$. On pose $\beta(A) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_{i,i}$. Montrer que $M_0 = \{A \in \mathcal{M} \ / \ \alpha(A) = \beta(A)\}$ est un espace vectoriel et calculer sa dimension.

Partie III

Pour un entier $p \geq 2$ on considère u un endomorphisme de E nilpotent d'indice p c'est-à-dire tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

1) a) Montrer que pour tout vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$, la famille de vecteurs $\{u^i(x) \mid 0 \leqslant i \leqslant p-1\}$est une partie libre de E.

   b) En déduire que p est inférieur ou égal à n et que u est cyclique si et seulement si $p = n$.

2) *Application* : pour tout entier $k \geqslant 0$ on désigne par $\mathbb{R}_k[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à k.
   Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_k[X]$ défini (pour $k \geqslant 1$) par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_k[X], \quad \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

   a) Déterminer $Im\Delta$. Montrer que Δ est cyclique.

   b) Soit D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_k[X]$ qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivé P'
   Montrer que D est un élément de $C(\Delta)$.

   c) La question (I.2.c)) permet de définir des réels $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ tels que $D = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \Delta^i$ et ce de façon unique.
   Déterminer ces réels lorsque $k = 1$, $k = 2$ et $k = 3$.

Quelques indications à la page suivante... à ne consulter qu'après une première recherche.

Indications à utiliser après une première recherche.

Q. prél. Il y a de nombreuses façons de faire...
On peut retrouver une expression du déterminant de nombreuses façons, ou sans le calculer on peut interpréter cette matrice en terme de système linéaire, et la relier à un célèbre problème.

I.1.a Pour une relation d'ordre donnée, quelle est la définition de plus petit élément d'un ensemble ? On peut penser à une partie de $\mathbb{R}$ pour $\leq$ au besoin.

I.1.b Par l'absurde : on peut supposer qu'une certaine famille est liée...

I.2.d On peut essayer d'écrire la matrice de u dans une certaine base...

I.3.a On peut à utiliser l'écriture matricielle, en partant d'une base de F bien complétée

I.3.c Que peut-on déduire de **I.3.c** concernant $\chi_u(u)(x) = 0$?

I.4.a Ce résultat classique est souvent appelé le lemme de Schur.
On peut fixer deux vecteurs x et y tels que (x, y) soit libre, et comparer $u(x+y)$, $u(x)$ et $u(y)$.

II.3.a On pourra utiliser une base convenable.

III.1.c On peut commencer par étudier $\operatorname{Ker}\Delta$ et en déduire la dimension de $Im\Delta$.

II.4.b On peut souhaiter utiliser ce qui précède et pour cela déterminer les ordres de multiplicité des valeurs propres de J.

Sources.

◇ A quelques modifications près, le sujet est celui donné au concours ENSI MP 84. Le fichier .tex mis à disposition par Mme Mondini m'a permis de gagner beaucoup de temps : merci beaucoup !

◇ Le sujet original utilise la notation $\{e_1, \ldots, e_n\}$ pour discuter des **parties** libres (ou pas)...Cela peut faire réfléchir...

◇ Pour aller plus loin, on peut consulter de nombreux problèmes sur le sujet : ENS Lyon 87 (endomorphismes cycliques et matrices de Frobenius), ENSAI 2000, TPE 96, ENS Fontenay Saint-Cloud 78,...

◇ On trouve de nombreux exercices en lien avec les endomorphismes cycliques dans tous les bons livres : dans le livre *Compléments d'algèbre linéaire* de L. Lesieur, R.Temam et J.Lefebvre (p32), dans le livre *Mathématiques générales - exercices avec solutions* de A.Tissier (p142), dans le livre *Exercices...posés à l'oral des concours de Polytechnique et des ENS - Tome 2* de E. Leichtnam et X.Schauer, dans le livre *Algèbre linéaire* de H.Roudier (étude 14 dans la troisième édition) et comme d'habitude plusieurs exercices dans le livre *Oraux X-ENS -Algèbre 2* - de S.Francinou, H.Gianella et S.Nicolla (à partie de 2.52). On peut également consulter l'Annexe B du livre *Les Maths en tête - Algèbre* - de X.Gourdon.

◇ Pour aller (bien) plus loin, on peut consulter ici :

`http://math.univ-lille1.fr/~serman/agreg/alglineaireCours.pdf`

un document génial écrit par Olivier Serman (mais dont vous ne disposerez malheureusement pas à l'oral).