# Méthode de Gauss-Jacobi.

Séance du 15 janvier 2016

On se propose dans ce problème d'étudier une méthode de calcul approché des valeurs propres d'une matrice symétrique réelle.

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels, par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques, par $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales d'ordre $n$, et par $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales directes d'ordre $n$.

La notation $A = (a_{i,j})$ pour une matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ signifie que $A$ a pour coefficient $a_{i,j}$ en $i$-ième ligne et $j$-ième colonne. Dans ce cas, la transposée de $A$ sera notée ${}^tA$ et définie par $({}^tA)_{i,j} = a_{j,i}$ et la trace de $A$ notée $\mathrm{Tr}(A)$ sera définie par $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

On désigne par $\mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la matrice $(a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, telle que $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ a_{i,i} = \alpha_i$.

## Partie I - Une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ -

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

**I.1.a.** Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ on a $Tr(AB) = Tr(BA)$.
**I.1.b.** Montrer qu'en posant $< A, B >= \mathrm{Tr}\left(A^tB\right)$ on définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On notera $\|.\|$ la norme induite .
**I.2.** Montrer que pour toute matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\left(\sum_{i=1}^n a_{i,i}\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2.$$

En déduire la norme de l'application Tr subordonnée à la norme $\|.\|$.
**I.3.** Soit $\Omega$ un élément de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\|\Omega A\| = \|A\|$. Prouver que si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ la matrice $B = {}^t\Omega A \Omega$ est elle-même symétrique et que l'on a, en notant $(b_{i,j})$ les coefficients de $B$ l'égalité

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{i,j}^2.$$

**I.4.** Montrer que la partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée des matrices diagonales en est un fermé.

## Partie II - La méthode dans le cas où $n = 2$ -

On considère une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et pour $\theta \in \mathbb{R}$ la matrice $\Omega$ de $\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$ définie par $\Omega = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. On pose $B = {}^t\Omega A \Omega$ dont on note $(b_{i,j})$ les coefficients.

**II.1.a.** Calculer les coefficients de la matrice $B$.
**II.1.b.** Montrer que $b_{1,1}^2 + b_{2,2}^2 + 2b_{1,2}^2 = a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + 2a_{1,2}^2$ .
**II.1.c.** On suppose ici que $a_{1,2} \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique réel $\theta$ de $]-\pi/4, 0[\cup]0, \pi/4]$ tel que $b_{1,2} = 0$. On le notera $F(A)$.
**II.1.d.** Quel résultat classique du cours a-t-on retrouvé dans le cas de la dimension deux ?
**II.1.e.** Dans le cas de la matrice $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$, donner une expression de $F(A)$, puis en déduire les valeurs propres de $A$ (on pourra calculer $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$).

## Partie III - Suites dans un evn de dimension finie -

On considère $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. On se propose de démontrer le résultat suivant

**Théorème 1 :** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E$. Si $(x_n)$ est bornée, admet un nombre fini de valeurs d'adhérences et si $\|x_{n+1} - x_n\|_E$ converge vers 0 alors $(x_n)$ est convergente.

Pour le montrer, on considère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant les hypothèses de ce théorème : on note $l_1, \ldots, l_N$ les différentes valeurs d'adhérence de $(x_n)$ où $N \in \mathbb{N}^*$ est le cardinal de l'ensemble des valeurs d'adhérence.

**III.1.a.** Montrer que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ k \geq n_\epsilon \Rightarrow x_k \in \bigcup_{i=1}^{N} B(l_i, \epsilon)$$

où $B(l_i, \epsilon)$ désigne la boule ouverte de centre $l_i$ et de rayon $\epsilon$ dans $E$.
**III.1.b.** Montrer que pour $\epsilon > 0$ assez petit, il existe $i \in \{1, \ldots, N\}$ et un entier $n_0$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq n_0 \Rightarrow x_k \in B(l_i, \epsilon).$$

**III.1.c.** Conclure.

## Partie IV - Méthode de Jacobi -

Dans cette partie, on fixe un entier $n \geq 2$ et une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont on note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres, éventuellement répétées avec leur multiplicité. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, et deux entiers $p$ et $q$ compris entre 1 et $n$ et tels que $p < q$, on définit une matrice $\Omega(p, q, \theta) = (\omega_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant :
- $\omega_{i,i} = 1$ si $i \notin \{p, q\}$
- $\omega_{p,p} = \omega_{q,q} = \cos(\theta)$,
- $\omega_{p,q} = \sin(\theta)$ et $\omega_{q,p} = -\sin(\theta)$ et les autres coefficients sont nuls, c'est-à-dire
- $\omega_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et ($i \notin \{p, q\}$ ou $j \notin \{p, q\}$).

**IV.1.a.** On note $B = {}^t\Omega(p,q,\theta)A\Omega(p,q,\theta)$. Exprimer en fonction des coefficients de $A$ et de $\theta$ les coefficients $b_{i,j}$ puis $b_{i,p}$ et $b_{i,q}$ pour $i$ et $j$ tous deux différents de $p$ et $q$, ainsi que $b_{p,q}$, $b_{p,p}$ et $b_{q,q}$.
**IV.1.b.** Donner une relation simple entre les matrices $\begin{pmatrix} b_{p,p} & b_{p,q} \\ b_{q,p} & b_{q,q} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_{p,p} & a_{p,q} \\ a_{q,p} & a_{q,q} \end{pmatrix}$
**IV.1.c.** Montrer qu'il existe un unique $\theta \in ]-\pi/4, 0[\cup]0, \pi/4]$ tel que $b_{p,q}$ soit nul.

On définit alors par récurrence une suite de matrices $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (on notera $A_k = (a_{i,j}^{(k)})$) de la façon suivante : $(A_k)$ est définie par son premier terme $A_0 = A$ et par la relation de récurrence $\forall k \in \mathbb{N},\ A_{k+1} = {}^t\Omega_k A_k \Omega_k$ où $\Omega_k = \Omega(p,q,\theta)$ avec $p$, $q$ et $\theta$ (qui dépendent de $k$) choisis comme suit :
- $p$ et $q$ sont choisis tels que $p < q$ et $a_{p,q}^{(k)} = \mathrm{Max}_{i\neq j}|a_{i,j}^{(k)}|$
- $\theta$ est l'unique élément de $]-\pi/4, 0[\cup]0, \pi/4]$ tel que $a_{p,q}^{(k+1)} = 0$ (l'existence et l'unicité étant garantis par **IV.1.c.** ).

**IV.2.** On souhaite étudier la convergence de la suite $(A_k)$ : pour cela on introduit les suites $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par $\forall k \in \mathbb{N},\ D_k = \mathrm{Diag}(a_{1,1}^{(k)}, \ldots, a_{n,n}^{(k)})$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ B_k = A_k - D_k$. On introduit également la suite réelle $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall k \in \mathbb{N},\ \epsilon_k = \|B_k\|^2$.

**IV.2.a.** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\epsilon_k \leq n(n-1)|a_{p,q}^{(k)}|^2$ et $\epsilon_{k+1} = \epsilon_k - 2|a_{p,q}^{(k)}|^2$.
**IV.2.b.** Montrer que $(B_k)$ converge vers la matrice nulle.
**IV.2.c.** Montrer que $(D_k)$ admet un nombre fini de valeurs d'adhérence.
**IV.2.d.** Montrer que $(D_k)$ est bornée, puis que la suite de terme général $D_{k+1} - D_k$ converge vers la matrice nulle.
**IV.2.e.** Montrer que $(D_k)$ et $(A_k)$ convergent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire un algorithme permettant d'obtenir des valeurs approchées des valeurs propres de $A$.
**IV.2.f.** Dans cette question on suppose que les valeurs propres de $A$ sont disctinctes. Montrer que la suite $(E_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ E_k = \Omega_1\Omega_2\ldots\Omega_k$ est convergente. Quelle est l'utilité ?