Agrégation interne : Equations Différentielles.

Système linéaire d'ordre un.

`Exercice 1.`
0. D'abord révisons nos classiques : résoudre l'équation différentielle $y' = 2xy + e^{x^2+1}$.
On se propose maintenant de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x^2y' = y$ (E) .
1. Résoudre l'équation (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Tracer les solutions.
2. Montre que si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = Cy_0(x)$ où $C \in \mathbb{R}$ et y_0 est une fonction que l'on déterminera.
3. Conclure.
4. Peut-on appliquer le théorème de Cauchy pour avoir existence et unicité d'une solution sur $\mathbb{R}$ prenant une valeur donnée en 0 ?

Ordre deux - Utilisation de développement en série entière.

`Exercice 2.`
0. D'abord révisons nos classiques : chercher les solutions sur $I =]-1, +\infty[$ de l'équation (E') : $(x+1)y'' - y' - xy = e^{-x}$. On remarquera que la restriction de $x \mapsto e^x$ à I est une solution du système homogène associé.
L'objectif de l'exercice qui suit est l'étude de l'équation différentielle (E) : $y'' + xy' + y = 0$.
1. Supposons qu'une solution y de (E) soit développable en série entière sur l'intervalle $]-R, R[$ avec $R > 0$. Notons $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coefficients de ce développement, de sorte que pour $|x| < R$ on ait $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$. Trouver pour tout n de $\mathbb{N}$ une relation entre les coefficients c_{n+2} et c_n.
2. En déduire une expression de c_{2n} et de c_{2n+1} en fonction de n, c_0 et c_1.
3. Ecrire le développement en série entière de y si on suppose $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. On le note y_0. Ecrire de même le développement en série entière de y si on suppose $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. On le note y_1.
4. Conclure.

Cas non linéaire - Changement de variable et équation à variables séparées.

`Exercice 3.` On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y' = 2ty^2 \quad \text{(E)}$$

où l'inconnue y est à valeurs réelles.
1. Montrer que les solutions de (E) ne s'annulent jamais ou alors s'annulent sur leur intervalle de définition.
2. Soit y une solution de (E) définie sur un intervalle I et qui ne s'annule pas. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in I,\ y(t) = \frac{1}{C - t^2}.$$

On notera y_C cette solution.
3. Déterminer pour tout $C \in \mathbb{R}$ les variations de y_C sur son ensemble de définition. On pourra distinguer les cas $C < 0$, $C = 0$ et $C > 0$.
4. Constater sur cet exemple que pour tout $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique solution maximale de (E) qui vérifie $y(t_0) = y_0$. Pouvait-on le prévoir ? On représentera les solutions .

Utilisation des séries de Fourier

`Exercice 4.` Le but de l'exercice est de déterminer si l'équation différentielle (E) $y'' + e^{it}y = 0$ admet des solutions 2π-périodiques. Pour toute fonction f continue 2π-périodique et tout $n \in \mathbb{Z}$ on note $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$.

1. Montrer que si f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, alors $c_n(f'') = -n^2 c_n(f)$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{int}}{(n!)^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction 2π-périodique. On note f cette fonction.
3. Montrer que f est solution de (E).
4. On considère $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction 2π-périodique et solution de (E). Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_{n-1}(g) = n^2 c_n(g)$.
5. Donner pour $n \in \mathbb{Z}$ une expression de $c_n(g)$ en fonction de $c_0(g)$ et de n.
6. En déduire que l'ensemble des fonction 2π-périodiques solutions de (E) est l'espace vectoriel engendré par f.
7. Est-ce que l'équation (E) admet des solutions qui ne sont pas 2π-périodiques ?