Agrégation interne : Intégrales à paramètres.

Un classique pour retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss.

Exercice 1.
1. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ est convergente. L'objectif de l'exercice est de calculer la valeur de cette intégrale, dite intégrale de Gauss.
2. Justifier que l'on définit bien des fonctions f et g de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ en posant :

$$f(x) = \Big(\int_0^x e^{-t^2}dt\Big)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt.$$

3. Montrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et montrer que $f' + g'$ est nulle sur $\mathbb{R}^+$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$.
5. Etudier la limite de g en $+\infty$.
6. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.
7. En déduire la valeur de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$.

Le minimum à savoir faire avec la fonction Gamma.

Exercice 2.
1. Etablir que $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $x > 0$. On appelle alors fonction Γ la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.
2. Calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (on pourra commencer par montrer la continuité sur tout intervalle $[a, b]$ avec $0 < a < b$).
4. Montrer que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner une expression de sa dérivée sous forme intégrale.
5. Montrer que Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner une expression de ses dérivées sous forme intégrale.
6. Donner un équivalent simple de la fonction Γ au voisinage de 0.
7. Etudier la convexité de la fonction Γ, ses limites en 0 et $+\infty$, et donner son allure.
8. Pour d'autres propriétés importantes de la fonction Γ (formule des compléments, lien avec la fonction Beta, expressions en termes de produits infinis), on peut reprendre le premier problème étudié cette année.

Un classique pour retrouver la valeur de l'intégrale de Dirichlet

Exercice 3. On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}dt$.
1. Montrer que $F(x)$ est bien définie pour $x \geq 0$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer F'.
3. Calculer F.
4. En déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

Exercice 4. *Tiré d'un grand classique également...*
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}dt$ est convergente. On note $g(x)$ sa

valeur.

2. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$, admet pour limite 0 en $+\infty$, est $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$ et vérifie $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g''(x) + g(x) = \frac{1}{x}$.

Rappel des théorèmes au programme pour les intégrales généralisées

Dans ce qui suit, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide (et pas forcément compact !).

Théorème 1. Soit (f_n) une suite de fonctions réelles ou complexes, continues par morceaux sur I. Si
• la suite de fonction (f_n) converge simplement vers une fonction $f\ :\ I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, et si
• il existe une fonction $\phi\ :\ I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times I,\ \ |f_n(t)| \leq \phi(t)$, **alors**
les fonctions f_n et f sont intégrables sur I, et on a

$$\int_I f_n(t)\ dt \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_I f(t)\ dt\ .$$

Théorème 2. Soit $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions réelles ou complexes, continues par morceaux sur I et intégrables sur I. Si
• la série de fonction $\sum_{n \geq n_0} f_n$ converge simplement vers une fonction $f\ :\ I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, et si
• la série $\sum \int_I |f_n|$ converge **alors**
f est intégrable sur I, et on a

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\ dt\ = \int_I f(t)\ dt\ .$$

Théorème 3. Soit une fonction $f\ :\ X \times I\ \to \mathbb{C}$. Si
• pour tout $x \in X$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
• pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X et si
• il existe une fonction $\phi\ :\ I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall (x,t) \in X \times I,\ \ |f(x,t)| \leq \phi(t)$, **alors**
la fonction g définie sur X par $g(x) = \int_I\ f(x,t)\ dt$ est continue sur X.

Théorème 4. On suppose cette fois que X est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit une fonction $f\ :\ X \times I\ \to \mathbb{C}$. Si
• pour tout $x \in X$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I,
• pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur X et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur X et si
• il existe une fonction $\phi\ :\ I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall (x,t) \in X \times I,\ \ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \phi(t)$, **alors**
la fonction g définie sur X par $g(x) = \int_I\ f(x,t)\ dt$ est dérivable sur X et on a pour tout $x_0 \in X$ l'égalité

$$g'(x_0) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\ dt.$$