IL L

Ln2 -TD 6 : Changements de variables - Espaces L^p

Exercice 1 *Changement de Variables*
Calculer

$$\int_A \frac{xy(x^2+y^2)}{x^2-y^2}dxdy$$

avec $A=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 | x>0 \text{ et } 1\leq xy\leq 2 \text{ et } 1\leq x^2-y^2\leq 4\}$
On pourra poser $u=xy$ et $v=x^2-y^2$, et étudier $(u,v)\rightarrow(x,y)$.

Exercice 2 *Espaces L^p et l^p*

Dans tout l'exercice, p et q désigneront des éléments de $\mathbb{R}$ vérifiant $1\leq p\leq q$, et X une partie mesurable de $\mathbb{R}$ (muni de la mesure de Lebesgue).
1- L'un des deux ensembles $L^p(\mathbb{R})$ et $L^q(\mathbb{R})$ est-il inclus dans l'autre ?
2- On suppose maintenant que X est de mesure finie.
a)- Montrer que $L^2(X)\subset L^1(X)$.
b)- Montrer que plus généralement $L^q(X)\subset L^p(X)$.
c)- Que penser de l'autre inclusion ?
3- On considère l^p l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valeurs complexes telles que $\sum_{k=1}^{\infty}|x_n|^p<+\infty$.
a)- Rappeler pourquoi l^p est en fait $L^p(\mathbb{N},\mu)$ avec une mesure μ sur $\mathbb{N}$ bien choisie.
b)- Montrer que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l^p on a pour n supérieur N convenable : $|x_n|<1$.
c)- En déduire que $l^p\subset l^q$.
d)- Que penser de l'autre inclusion ?

Exercice 3 $L^p\cap L^q$

1 Montrer que si $f\in L^p\cap L^q$ alors $f\in L^r$, où $1/r=\alpha/p+(1-\alpha)/q$ et $\alpha\in[0,1]$, avec l'*inégalité d'interpolation :*

$$\|f\|_{L^r}\leq \|f\|_{L^p}^{\alpha}\|f\|_{L^q}^{1-\alpha}$$

.

Exercice 4 *Uniforme continuité de la translation dans L^p, $p\neq+\infty$*

Soit $f\in L^p(\mathbb{R})$, $p\in[1,+\infty[$. On pose pour $u\in\mathbb{R}$, $T_uf=f(x-u)$.

1- Comparer pour tout h de $L^p(\mathbb{R})$ et tout u de $\mathbb{R}$: $\|T_uh\|_p$ et $\|h\|_p$.

2- Montrer que

$$lim_{u\rightarrow 0}\|T_uf-f\|_p=0.$$

(On pourra utiliser la densité du sous-espace des fonctions continues à support compact dans $L^p(\mathbb{R})$.)

Exercice 5 *Un peu de convolution*

Soit $(p,q)\in[1,+\infty[^2$ tel que $1/p+1/q=1$. On pose

$$\begin{array}{rcl} L^p(\mathbb{R})\times L^q(\mathbb{R}) & \rightarrow & L^\infty(\mathbb{R}) \\ (f,g) & \mapsto & [f*g\ :\ x\mapsto \int f(x-y)g(y)\ \mathrm{d}y] \end{array}$$

1- Montrer que cette application est bien définie, bilinéaire, symétrique au sens ou $f * g = g * f$ et continue, on montrera en particulier que

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

2- Montrer que $f * g$ est une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (on pourra montrer que $T_u(f * g) = (T_u f) * g$ et que $lim_{u \to 0} \|T_u(f * g) - f * g\|_\infty = 0$).
3-Montrer que si f et g sont à support compact alors $f * g$ l'est aussi et que l'on a

$$\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}(f) \ + \ \text{supp}(g).$$

4-En déduire que $f * g \in \mathcal{C}_0$ où $\mathcal{C}_0$ est l'ensemble des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.
5 *- Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$ alors on peut encore définir $f * g$ p.p et que l'on a

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

(On commencera par montrer que la fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, $|f| * |g|$, est dans $L^p(\mathbb{R})$ en écrivant que $|f| = |f|^{1-1/p} |f|^{1/p}$.)

Exercice 6 *Régularisation*

Soit $K \in L^1(\mathbb{R})$, support compact, de classe C^∞ tel que $K \geq 0$ et $\int K(x)\ dx = 1$. On pose $K_n(t) = nK(nt)$, $n \in \mathbb{N}$.
0- Donner un exemple de tel K.
1- Vérifier que $\int K_n = 1$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ $p \in [1, +\infty[$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|K_n * f(x) - f(x)|^p = |\int_{\mathbb{R}} (f(x - y/n) - f(x)) K(y)\ dy|^p.$$

2-En déduire, en utilisant l'inégalité de Jensen :

$$|K_n * f(x) - f(x)|^p \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x - y/n) - f(x)|^p K(y)\ dy.$$

Montrer que

$$lim_{n \to \infty} \|K_n * f - f\|_p = 0.$$

(indice: On pourra s'aider de l'exercice 4).
3- Etudier la régularité de la fonction $K_n * f$.
4- Montrer que l'ensemble des fonctions C_c^∞ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $p \in [1, +\infty[$.
(On pourra commencer par approcher un élément f de $L^p(\mathbb{R})$ par une fonction g de $L^p(\mathbb{R})$ à support compact. On étudiera ensuite $K_n * g$).
5 * - Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty]$. Montrer que si pour tout g de $\mathcal{C}_\rfloor^\infty$ on a :

$$\int fg\text{d}x \ = \ 0$$

alors $f = 0$ p.p.

Exercice 7 *Etude d'un opérateur de L^1 - Examen de Fevrier 2000 -*

Dans ce problème δ désigne un réel de $]0, 1[$ et $I = [0, 1]$. Pour $f \in L^1(I)$, on pose

$$G(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{f(y)}{|x-y|^\delta} & si \quad x \neq y, \\ 0 & si \quad x = y. \end{array} \right.$$

1 Etudier brièvement les variations sur $[0, 1]$ de la fonction $\phi_\delta(t) = t^{1-\delta} + (1 - t)^{1-\delta}$.
2 Montrer que G est intégrable sur le domaine $I \times I$. En déduire que $ppx \in I$, la quantité $F(x) = \int_0^1 \frac{f(y)}{|x-y|^\delta}\ dy$ est finie.
3 Montrer que l'application $\Lambda : f \longmapsto F$ est linéaire, continue sur $L^1(I)$ de norme $\|\Lambda\| \leq \frac{2^\delta}{1-\delta}$.
4 * Montrer qu'en fait on a $\|\Lambda\| = \frac{2^\delta}{1-\delta}$.