Licence de Mathématiques - Intégration - 2003-2004
Interrogation

1. Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^+$, avec $f(0) = \pi$. Posons $I_n = \int_0^\infty f(nt)n^2 e^{-n^2 t}dt$. Justifier l'existence de I_n et calculer $\lim_{n\to\infty} I_n$.

2. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ qui satisfait

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(3x+y)f(5y)dxdy = 4/15.$$

Calculer $|\int_{\mathbb{R}} f(x)dx|$.

3. Soit $f(x,y) = sin(x^2+y^2)$. Notons $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 < n\pi\}$. Calculer $I_n = \int_{D_n} |f(x,y)|dxdy$ en faisant le changement de variable $x = rcos(\theta), y = rsin(\theta)$. Est-ce que f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$?

4. Montrer que $L^3([0,1]) \subset L^2([0,1])$. Est-ce qu'on a une égalité?

5. La fonction $x \to \frac{log(x)}{2\sqrt{1+x^4}}$ est-elle intégrable sur $]0;+\infty[$?

6. Etudier la limite éventuelle de la suite définie par l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{+\infty} cos^3(\frac{n}{n+1}x)\mathbf{1}_{[0;\frac{n+1}{n}]}(x)dx$$

7. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction définie par l'intégrale :

$$F(t) = \int_0^{+\infty} sin(t^2x)\frac{sin(x)}{e^x-1}dx$$

8. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ sinon.
On note D le disque de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$, et D' son complémentaire. Déterminer tous les p tels que $f \in L^p(D)$. Déterminer de meme les p tels que $f \in L^p(D')$.

9. Soit $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > y \text{ et } y > 0\}$. V est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (au fait, pourquoi ?).
a). Montrer que le changement de variables $u = \frac{x}{y}$ $v = x - y$ définit un C^1 difféomorphisme entre un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ que l'on déterminera, et V.

b). Calculer

$$\int_V e^{(-x+y)} \frac{(x-y)^{\frac{1}{2}}}{x^2}$$

10. Etudier la convergence de la suite d'intégrales suivante :

$$I_n = \int_0^1 arctan(nx)dx.$$

11. Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{[0,\pi/2]} \frac{x^2 ycos(y)}{(x^3+y^3)^{4/3}} dydx$$

12. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $\mathcal{B}$ étant la tribu des boréliens. On suppose que

$$\mu([0,1[) = 1 \qquad et \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall B \in \mathcal{B}\ \mu(x+B) = \mu(B)$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mu([0,1/n[) = 1/n$. (Ind.: On pourra utiliser la décomposition $[0,1[= \bigcup_{k=0}^{n-1} [k/n; (k+1)/n[$).
2) Montrer que $\mu(\{0\}) = 0$. Puis, montrer que toute partie dénombrable de $\mathbb{R}$ est un borélien de μ mesure nulle.
3) Montrer que pour tous réels $a \leq b$, on a $\mu([a,b[) = b - a = \mu(]a,b])$.

13. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction définie par

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} ln(1+x)}{x(1+x^2)} dx$$

14. Montrer que la fonction $x \to xe^{-x}$ est dans $L^p([0,+\infty[)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$.