L3 Mathématiques - Mesure et probabilités - 2003-2004
Interrogation

1 Etudier la convergence de l'intégrale impropre :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2) - x \arctan x}{x^3} dx$$

2 Etudier la convergence de l'intégrale impropre :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x.e^{-x^2}}{e^x - 1} dx$$

3 Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Décrire (sous formes d'intervalles) les ensembles $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a, b - \frac{1}{n}]$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]a - \frac{1}{n}, b]$.

Calculer de deux facons $\lim_{n\infty} \lambda([a, b - \frac{1}{n}])$, puis $\lim_{n\infty} \lambda(]a - \frac{1}{n}, b])$ où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

4 Soit f une application d'un ensemble E_1 dans un ensemble E_2. Soit $\mathcal{T}_1$ une tribu sur E_1, et $\mathcal{A} = \{f(B) : B \in \mathcal{T}_1\}$. Est-ce que $\mathcal{A}$ est une tribu ?

5 Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit A de $\mathcal{T}$ tel que $0 < \mu(A) < +\infty$. On définit pour tout B de $\mathcal{T}$:

$$\mu_A(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)}$$

Vérifier que μ_A est une mesure de probabilités.

6 Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $\mathcal{B}$ étant la tribu des boréliens. On suppose que

$$\mu([0,1[) = 1 \qquad et \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall B \in \mathcal{B}\ \mu(x + B) = \mu(B)$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mu([0, 1/n[) = 1/n$. (Ind. : On pourra utiliser la décomposition $[0,1[= \bigcup_{k=0}^{n-1}[k/n; (k+1)/n[$).
2) Montrer que $\mu(\{0\}) = 0$. Puis, montrer que toute partie dénombrable de $\mathbb{R}$ est un borélien de μ mesure nulle.
3) Montrer que pour tous réels $a \leq b$, on a $\mu([a, b[) = b - a = \mu(]a, b])$.

7 On note $\mathbf{1}_X$ la fonction indicatrice d'un ensemble X. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que $\mathbf{1}_{\bigcup_n A_n}(x) = \sup\{1_{A_n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ et que $\mathbf{1}_{\bigcap_n A_n}(x) = \inf\{1_{A_n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$.

On pose $\overline{\lim_{n\infty}} A_n = \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k$ et $\underline{\lim_{n\infty}} A_n = \bigcup_{n\geq 0} \bigcap_{k\geq n} A_k$.

Soient A et B de $\mathcal{P}(E)$, et $(A_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout n entier : $A_{2n} = A$ et $A_{2n+1} = B$. Déterminer $\overline{\lim}_{n\infty} A_n$ et $\underline{\lim}_{n\infty} A_n$.

8 Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Montrer qu'une application $\mu : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ vérifiant :

$\bullet \mu(\oslash) = \emptyset$
$\bullet \forall A, B \in \mathcal{T}, A \cap B = \oslash$ implique $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
$\bullet$ Pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, croissante pour l'inclusion, $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\infty} \mu(A_n)$

est une mesure sur $(E, \mathcal{T})$.

9 Soit $\Omega = \{1 \ldots 6\} \times \{1 \ldots 6\}$ et P la mesure uniforme sur Ω,(c'est à dire $P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{36}$) . Soit X l'application de $(\Omega, \mathcal{P}, P)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ définie par $X(i, j) = i + j$. Déterminer la mesure image P_X sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ définie par $P_X(A) = P(X^{-1}(A))$.

10 Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction f monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dénombrable. On pourra considérer dans chaque $A_n := f^{-1}([n,\, n+1])$ le nombre de points $x \in A_n$ tels que $|f(x_+) - f(x_-)| \geq k^{-1}$.

De même, soit un ensemble I non dénombrable et une famille $\{x_i\,; i \in I\}$ de nombres réels. On suppose que $\sum_{i\in I} |x_i| := \sup \sum_{\mathrm{J}\subset \mathrm{I}, \mathrm{J\ finie}} |\mathrm{x_i}| < +\infty$. Montrer que l'ensemble $\{i \in I\,; x_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

11 a) Soit f une fonction Riemann intégrable sur tout intervalle borné $[0\,, A]$. Ecrire que
(i) l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente.
On pose maintenant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n := \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\, dx$. Ecrire que
(ii) la série de terme général u_n est convergente.
Quelles sont en général les relations entre (i) et (ii) ? On suppose maintenant que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Peut-on dire plus ?

a) On pose $f(x) := x^{-\alpha} \sin 2\pi x$, où $\alpha = 0,\, 1 \,\mathrm{ou}\, 2$. Dans chaque cas, dites si (i) et (ii) sont vérifiées et démontrez-le. Pour $\alpha = 0$, tracez le graphe de $F(x) := \displaystyle\int_0^x f(y)\, dy$ entre n et $n+1$. Conclusion ?

12 On souhaite tirer au hasard un nombre dans l'intervalle $[0, 1]$, de facon à ce que la probabilité de tomber dans un intervalle $[a, b]$ corresponde à la longueur $b - a$ de cet intervalle. Proposer une tribu sur $[0, 1]$ et une mesure convenable.

Quelle est la probabilité que le nombre soit inférieur à $\frac{1}{2}$ ou supérieur à $\frac{3}{4}$? Quelle est la probabilité que l'élément tiré soit irrationnel ?

L3 Mathématiques - Mesure et probabilités - 2003-2004
Exercices de recherche.

1 Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un epace probabilisé. Montrer les deux inégalités :

$$\text{a) } \mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B) \leq \min(\mu(A)(1-\mu(B)), \mu(B)(1-\mu(A))))$$

$$\text{b) } \mu(A)\mu(B) - \mu(A \cap B) \leq \min(\mu(A)(1-\mu(A)), \mu(B)(1-\mu(B)))$$

En déduire :

$$|\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| \leq \sqrt{\mu(A)(1-\mu(A))\mu(B)(1-\mu(B))} \leq \frac{1}{4}$$

2 Montrer àl'aide du célèbre "procédé diagonal de Cantor" que l'ensemble E des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ est non dénombrable. [On pourra raisonner par l'absurde et considérer si E était dénombrable la suite de terme général $v_n := 1 - u_n^n$, où u_k^n est le k^{iem} terme de la n^{iem} suite de E].