Feuille 2

M1 MEEF - Arithmétique

L'objectif de cette feuille est de s'entrainer sur des problèmes et des exercices se rapprochant de l'épreuve 2 des écrits du Capes tout en consolidant les connaissances disciplinaires. Nous travaillerons également le thème des nombres décimaux et de l'écriture décimale à l'aide d'un sujet du Capes (type écrit 1).

A. Un exemple d'énoncé court, type épreuve 2.

On considère l'exercice suivant ainsi que les propositions de réponse de trois élèves.

Soit n un entier naturel.
Démontrer que, dans l'écriture en base dix, les entiers n et n^5 ont le même chiffre des unités.

Élève 1

Je regarde tous les cas possibles pour le chiffre des unités, entre 1 et 9.

$$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1, \qquad 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32, \qquad 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$$

et ainsi de suite. Je calcule les autres avec un tableur, ça marche chaque fois, c'est le même chiffre.

Élève 2

J'ai comparé les restes de n^5 et n dans la division euclidienne par 10 à l'aide d'un programme écrit en langage Python, j'obtiens les mêmes restes. Donc le chiffre des unités de n^5 et n est le même.

```
from math import*
for n in range(10):
    a=(n**5)%10
    b=n%10
    if a==b:
        print(n)
```

Élève 3

J'ai calculé $n^5 - n$ pour les premières valeurs de n, le dernier chiffre est 0.
Je vais le prouver par récurrence : je suppose que $n^5 - n$ est multiple de 10 et alors je dois montrer que $(n+1)^5 - (n+1)$ est aussi multiple de 10.

$$\begin{aligned}(n+1)^5 - (n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 \\ &= (n^5 - n) + 10(n^3 + n^2) + 5(n^4 + n) \\ &= 5(n^4 + n)\end{aligned}$$

car $n^5 - n$ et $10(n^3 + n^2)$ sont des multiples de 10.
Ensuite, je ne sais pas quoi faire pour $n^4 + n$.

1. Analyser les réponses des élèves en mettant en évidence les réussites et les éventuelles faiblesses.
2. Quel(s) résultat(s) est implicitement utilisé dans les réponses des deux premiers élèves ? Proposer un énoncé.
3. Proposer une correction de l'exercice destinée à une classe de Terminale.
4. L'expression *division euclidienne* rend un hommage à Euclide. Préciser de quelle grande civilisation Euclide était un mathématicien.
5. Proposer un énoncé et une démonstration du théorème de division euclidienne.

On considère l'exercice suivant ainsi que les propositions de réponse de trois élèves.

L'exercice.

Pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les entiers suivants : $a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$.

(a) Factoriser a et b.
(b) Justifier que pour tout entier n les entiers n et $2n+1$ sont premiers entre eux.
(c) Déterminer le pgcd de a et de b selon les valeurs de n.

Les réponses de trois élèves à la question (c).

<u>Élève 1 :</u>
$PGCD(a, b) = n - 4$ car $n - 4$ est le seul facteur commun de leur décomposition.

<u>Élève 2 :</u>
On a que le $PGCD$ de a et de b est $n - 4$ car n et $2n+1$ sont toujours premiers entre eux.

<u>Élève 3 :</u>
En fait $PGCD(a, b) = 5(n-4)$ car $PGCD(2n+1, n+3) = 5$ (en effet pour tout n on a $2(n+3) - 2(n+1) = 5$).

1. Analyser la réponse de l'élève 1 : quelle semble être sa confusion ? Apporter une aide.
2. Analyser la réponse de l'élève 2.
3. Analyser la réponse de l'élève 3. Préciser sa confusion et proposer une aide.
4. Proposer une correction de la question (c) destinée à une classe de Terminale.
5. Proposer un exercice d'arithmétique destiné à une classe et qui conduise à la mise en place d'un algorithme.
6. Pourquoi l'énoncé restreint-il le travail à des entiers supérieurs ou égaux à 5 ? Comment modifier l'énoncé pour pouvoir travailler avec tout entier naturel n, tout en gardant les mêmes objectifs ?
7. Proposer une courte séquence de cours de Terminale amenant à la définition du PGCD.

On considère l'exercice suivant ainsi que les propositions de réponse de trois élèves.

L'exercice.

Pour tout nombre entier naturel n on considère les entiers $a = 4n + 1$ et $b = 5n + 3$. Montrer que le PGCD de a et de b vaut 7 si et seulement si $n \equiv 5\ (7)$.

Les réponses de trois élèves à la question (c).

Élève 1

Si $n \equiv 5 \pmod 7$ *alors* $n = 7k + 5$.

En remplaçant, $\begin{cases} a = 28k + 21 \\ b = 35k + 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7(4k+3) \\ b = 7(5k+4) \end{cases}$

Donc 7 divise a et b et puisque $4(5k+4) - 5(4k+3) = 1$, *on en déduit que* $PGCD(a; b) = 7$.

Élève 2

Si $PGCD(a; b) = 7$ *alors* $4n + 1 \equiv 0 \pmod 7$ *soit* $4n \equiv 6 \pmod 7$.

Comme $2 \times 4 \equiv 1 \pmod 7$, $4n \equiv 6 \pmod 7 \Leftrightarrow n \equiv 5 \pmod 7$.

Élève 3

$4b - 5a = 7$ *donc* $PGCD(a; b)$ *est soit égal à* 1, *soit égal à* 7.

D'après ce tableau de congruences, j'obtiens l'équivalence.

n	$\equiv$	$\ldots \pmod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$4n+1$	$\equiv$	$\ldots \pmod 7$	1	5	2	5	3	0	4
$5n+3$	$\equiv$	$\ldots \pmod 7$	3	1	6	4	2	0	5

1. Analyser les réponses des trois élèves en mettant en avant les acquis et les faiblesses éventuelles.
2. Proposer deux corrections complètes de l'exercice, différentes, en utilisant les propositions de réponse des élèves.
3. Comment pourrait-on modifier l'exercice pour mieux mettre en avant la compétence *Chercher* ?

Problème 2 : décimales des nombres rationnels

Notations et définitions

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ désignent respectivement l'ensemble des nombres entiers naturels, celui des nombres entiers relatifs, celui des nombres décimaux et celui des nombres rationnels.
Un nombre réel x est dit *décimal* s'il existe un entier n tel que $10^n x \in \mathbb{Z}$.

On dit qu'une suite d'entiers naturels $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décimale si, pour tout entier $n \geq 1$, on a $0 \leq d_n \leq 9$, le premier terme d_0 étant un entier naturel quelconque.
Une suite décimale est dite *finie* si tous ses termes sont nuls à partir d'un certain rang.
Elle est dite :
– *impropre* si tous ses termes sont égaux à 9 à partir d'un certain rang ;
– *propre* dans le cas contraire du précédent.
On définit pour tout réel x la partie entière de x, notée $E(x)$, par la condition : $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Le but de ce problème est de démontrer quelques propriétés des nombres décimaux, puis d'étudier les décimales des nombres rationnels non décimaux.

Partie A : nombres décimaux

1. Démontrer que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ et que ces inclusions sont strictes.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ est stable pour l'addition et la multiplication.
3. Soit x un nombre rationnel positif. On pose $x = \dfrac{a}{b}$, avec a et b entiers naturels premiers entre eux et $b \neq 0$.
   3.1. On suppose qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, tels que $b = 2^\alpha \times 5^\beta$. Démontrer que x est décimal.
   3.2. On suppose que x est un décimal non entier.
   Démontrer que si p est un diviseur premier de b, alors $p \in \{2, 5\}$.
   3.3. Déduire des questions précédentes une condition nécessaire et suffisante sur b pour que le rationnel x soit un nombre décimal.

4. On considère une suite décimale $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   4.1. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$ est convergente. On note x sa limite.
   4.2. Démontrer que dans les deux cas suivants x est un nombre décimal :
   – la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est finie ;
   – la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est impropre.
   4.3. Démontrer que pour tout entier $N \geq 0$, on a $\displaystyle\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} \leq \frac{1+d_N}{10^N}$, avec égalité si et seulement si, pour tout $k \geq N+1, d_k = 9$.
   4.4. En déduire que si x est un réel vérifiant $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$ et si $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décimale propre, alors la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant cette égalité est unique.

   Si $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$, avec $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite décimale propre, on note alors $x = d_0, d_1 d_2 ... d_n ...$ et on dit que, pour tout $n \geq 1$, d_n est la n-ième décimale du réel x.
5. Démontrer que pour tout nombre décimal positif x, il existe une unique suite décimale finie $(d_n)_{0\leq n\leq N}$ telle que $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{d_n}{10^n}$.

Parte B : périodicité des décimales d'un rationnel positif non décimal

Soit x un nombre rationnel positif **non décimal**. On pose $x = \dfrac{a}{b}$, avec a et b entiers naturels premiers entre eux.

On définit par récurrence deux suites d'entiers naturels $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

- d_0 et r_0 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b ;
- pour tout $n \geq 0$, d_{n+1} et r_{n+1} sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $10\,r_n$ par b.

1. Soit N un entier tel que $N \geq 1$.

   1.1. Écrire un algorithme permettant d'afficher les entiers d_n et r_n de $n = 0$ jusqu'au rang N. *On suppose disposer d'une instruction calculant la partie entière $E(y)$ d'un réel y.*

   1.2. Donner pour le rationnel $x = \dfrac{5}{13}$ les valeurs de d_n et r_n jusqu'au rang $N = 7$.

2. 2.1. Démontrer par récurrence que pour tout entier n : $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n\,b}$.

   2.2. En déduire que, pour tout entier n, r_n est le reste de la division euclidienne de $10^n a$ par b.

   2.3. Démontrer que $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$ et que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décimale propre.

3. Dans cette question, on va établir que les suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont périodiques à partir d'un certain rang.

   3.1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $r_n \neq 0$.

   3.2. Démontrer que les nombres $r_0, r_1, ..., r_{b-1}$ ne peuvent pas être deux à deux distincts.

   3.3. Soit q le plus petit indice d'un reste figurant au moins deux fois dans la liste de la question précédente et q' l'indice du premier autre reste qui lui est égal.
   On pose $p = q' - q$, de sorte que $0 \leq q < q + p \leq b - 1$ et $r_q = r_{q+p}$.
   Démontrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période p à partir du rang q et que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période p à partir du rang $q + 1$.

Dans la suite, on dit que q est la pré-période du rationnel x et p sa période.
On note alors $x = d_0, d_1, ...d_q\,[d_{q+1}...d_{q+p}]$ si $q \geq 1$ et $x = d_0, [d_1...d_p]$ si $q = 0$.

4. On conserve dans cette question les notations précédentes.

   4.1. i. Démontrer que parmi les nombres $10^0, 10^1, ..., 10^{b-1}$, au moins deux d'entre eux sont congrus modulo b.

   ii. Démontrer que :
   - q est le plus petit exposant d'un nombre de la liste précédente qui est congru modulo b à un autre nombre de cette liste ;
   - $q + p$ est l'exposant du premier nombre de cette liste congru à 10^q modulo b et distinct de 10^q.

   4.2. Démontrer que le rationnel $x = \dfrac{a}{b}$ a la même période et la même pré-période que $\dfrac{1}{b}$.

Dans la suite, lorsque la fraction $\dfrac{1}{b}$ est non décimale, q et p seront nommés « la pré-période et la période de l'entier b ».

5. Déterminer la pré-période et la période des entiers suivants : $7; 12; 112$.

Partie C : détermination de la pré-période

On considère un entier b supérieur ou égal à 2 tel que la fraction $\dfrac{1}{b}$ soit non décimale et on note $\omega(b)$ sa pré-période et $\pi(b)$ sa période.

1. Dans cette question, on suppose que b est premier avec 10.

   1.1. Démontrer l'équivalence : $10^q \equiv 10^{q+p}$ modulo $b \Leftrightarrow 10^p \equiv 1$ modulo b.

   1.2. En déduire que $\omega(b) = 0$.

2. Dans cette question, on pose $b = 2^j \times 5^k \times c$, où c est un entier premier avec 10.
   Démontrer que $\pi(b) = \pi(c)$ et que $\omega(b) = \max(j, k)$.
   On pourra montrer que :
   $10^q\,(10^p - 1)$ *multiple de* $b \Leftrightarrow 10^q$ *multiple de* $2^j \times 5^k$ *et* $10^p - 1$ *multiple de* c.

3. Application : déterminer la période et la pré-période des nombres 150 et 1120.

Partie D : détermination de la période

Dans cette partie, on se propose de déterminer la période des entiers supérieurs ou égaux à 2, qui sont premiers avec 10, en fonction de leur décomposition en facteurs premiers. Si b est un tel entier, d'après la partie C, sa période $\pi(b)$ est le plus petit entier n non nul tel que $10^n \equiv 1$ modulo b.

1. Dans cette question, b est un nombre premier distinct de 2 et 5.

   1.1. On note $\overline{a}$ la classe d'un entier a dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$ l'ensemble $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ privé de $\overline{0}$.
   Démontrer que l'application $f : \begin{cases} (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* \to & (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* \\ \overline{a} \mapsto & \overline{10} \times \overline{a} \end{cases}$ est bien définie et injective.

   1.2. En utilisant la question précédente, démontrer que : $10^{b-1} \equiv 1$ modulo b.

   1.3. Démontrer que si r est le reste de la division euclidienne d'un entier n par un entier m, alors $10^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $10^n - 1$ par $10^m - 1$.
   On pourra utiliser une forme factorisée de $x^n - 1$, *où* x *désigne un réel quelconque.*

   1.4. Déduire des résultats précédents que :
   – si un entier k vérifie $10^k \equiv 1$ modulo b, alors $\pi(b)$ divise k ;
   – $\pi(b)$ divise $b - 1$.

2. Dans cette question, b et c sont deux entiers premiers avec 10 et premiers entre eux.

   2.1. Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que $10^n \equiv 1$ modulo bc si et seulement si n est un multiple de $\pi(b)$ et de $\pi(c)$.

   2.2. En déduire que $\pi(bc) = \operatorname{ppcm}(\pi(b), \pi(c))$.

3. Dans cette question, b est un entier de la forme p^n, où p est un nombre premier distinct de 2 et 5, et n un entier naturel non nul. On pose $\pi(p) = \ell$.

   3.1. Justifier l'existence de deux entiers q et r tels que $r \geq 1$ et $10^\ell - 1 = p^r \times q$.

   3.2. *Premier cas* : $n \leq r$. Démontrer que $\pi\left(p^n\right) = \ell$.

   3.3. *Deuxième cas* : $n > r$.
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel k, il existe un entier naturel Q premier avec p tel que $10^{\ell \times p^k} - 1 = p^{r+k} \times Q$ et que $\pi\left(p^{r+k}\right) = \ell \times p^k$.
   En déduire que $\pi(p^n) = \ell \times p^{n-r}$.

4. *Applications*

   4.1. Déterminer la période des entiers $3, 3^2, 3^3, 3^4, 7, 7^2$ et 7^3.

   4.2. En déduire la période de l'entier 27783.

L'usage des calculatrices, des ordinateurs et des téléphones portables n'est pas autorisé. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent êtres utilisés pour la suite du problème. Il ne faut pas hésiter à traiter les questions dans l'ordre de son choix.

1. Une analyse de production.

Un étudiant souhaite montrer que la relation de divisibilité est transitive. Identifier et décrire (en quelques lignes) le principal problème dans la proposition de réponse suivante.

> Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$. Supposons que $a|b$ et $b|c$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$. Comme $a|b$ on a $b = ak$. De même, comme $b|c$ on a $c = bk'$. On en déduit que $akk' = c$, et comme $kk' \in \mathbb{Z}$ on a par définition $a|c$.

2. Quelques questions proches du cours.

2.1. Enoncer et démontrer le théorème de Gauss (parfois appelé lemme de Gauss).

2.2. On rappelle que l'on dit qu'un réel x est décimal s'il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^n x \in \mathbb{Z}$. Sans utiliser d'autres connaissances sur les nombres décimaux, montrer précisément que $\frac{3}{7}$ n'est pas décimal.

2.3. On considère une suite décimale $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire une suite d'entiers naturels telle que pour tout entier $n \geq 1$ on ait $0 \leq d_n \leq 9$. On admet que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{10^n}$ est convergente.

2.3.1. Démontrer que pour tout entier $N \geq 0$ on a

$$\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} \leq \frac{1+d_N}{10^N}.$$

Préciser dans quel cas il y a égalité en justifiant précisément.

2.3.2. On considère un réel x et une suite décimale $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$. Préciser une condition supplémentaire à prendre sur les suite décimales pour qu'il y ait unicité d'une suite décimale vérifiant cette égalité. On démontrera précisément cette unicité.

3. Problème.

On rappelle que l'on dit qu'un entier relatif n est un cube s'il existe un entier relatif m tel que $n = m^3$.

L'objectif de ce problème est de déterminer les entiers relatifs x et y vérifiant $y^2 = x^3 + 16$.

3.1. Pour commencer on suppose que x et y sont deux entiers relatifs, avec y impair, vérifiant l'équation $y^2 = x^3 + 16$.

3.1.1. Montrer que pour tout entier n, n^3 est impair si et seulement si n est impair.

3.1.2. On suppose que a et b sont deux entiers naturels strictement positifs et premiers entre eux. Montrer que si ab est un cube, alors a et b sont également des cubes.

3.1.3. Montrer que le pgcd de $y+4$ et de $y-4$ divise 8, puis que ce pgcd vaut 1.

3.1.4. Montrer qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ un couple d'entiers impairs tel que $y+4=u^3$ et $y-4=v^3$.

3.1.5. On remarque qu'il en découle que $u^3-v^3=8$, c'est-à-dire que $(u-v)(u^2+uv+v^2)=8$ (on ne vous demande pas de le justifier). En déduire que $u=v+8$ et que $3v^2+24v+64=1$.

3.1.6. On pourrait conclure à une contradiction en montrant que le discriminant de $3v^2+24v+64$ est strictement négatif...mais on souhaite procéder autrement. En choisissant une bonne classe de congruence, montrer qu'il n'est pas possible pour $v \in \mathbb{Z}$ d'avoir $3v^2+24v+64=1$.

3.1.7. Conclure.

3.2. On suppose maintenant que x et y sont deux entiers relatifs, avec y pair, vérifiant l'équation $y^2=x^3+16$.

3.2.1. Montrer que x et y sont divisibles par 4.

3.2.2. On considère alors deux entiers relatifs a et b tels que $x=4a$ et $y=4b$. Montrer que b est impair.

3.2.3. Montrer que si n est un entier relatif tel que $b=2n+1$, alors n et $n+1$ sont des cubes.

3.2.4. Conclure.

UCA-UTLN-INSPE *M1 MEEF Maths*

Arithmétique
Durée : 3 h

L'usage des documents, des calculatrices, des ordinateurs et des téléphones portables n'est pas autorisé. Les téléphones portables doivent être rangés dans les sacs. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent êtres utilisés pour la suite du problème. Il ne faut pas hésiter à traiter les questions dans l'ordre de son choix.

On considère l'exercice suivant que l'on ne demande pas de résoudre en totalité. Les questions auxquelles vous devez répondre sont indiquées plus bas dans *Les questions pour le candidat.*

L'exercice.

Un triplet Pythagoricien est un triplet (a, b, c) de trois entiers naturels strictement positifs vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

A.a. Vérifier que $(3, 4, 5)$ est un triplet Pythagoricien.
A.b. Démontrer que si (a, b, c) est un triplet Pythagoricien et si k est un entier naturel non nul, alors (ka, kb, kc) est aussi un triplet Pythagoricien.
A.c. Peut-on trouver un triplet Pythagoricien (a, b, c) tel que $c > 10000$?

B. Dans cette question on traite l'exemple où $b = 6$. Déterminer tous les couples (a, c) d'entiers naturels strictement positifs tels que $(a, 6, c)$ soit un triplet Pythagoricien.

C. Un triplet Pythagoricien (a, b, c) est dit primitif si le plus grand diviseur commun à a, b et c est égal à 1.
C.a. On considère un triplet Pythagoricien (a, b, c). Montrer que (a, b, c) est primitif si et seulement si a et b sont premiers entre eux.
C.b. Montrer que si (a, b, c) est un triplet Pythagoricien primitif, alors a et b sont de parités différentes (c'est-à-dire : l'un est pair, l'autre impair). Dans la suite du travail, on supposera que c'est l'entier b qui est pair.

D. L'objectif de l'ensemble de cette question **D** est de montrer que (a, b, c) est un triplet Pythagoricien primitif avec b pair si et seulement si il existe des entiers u et v premiers entre eux, de parités différentes, vérifiant $u > v$, et tels que $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ et $c = u^2 + v^2$. On commence par considérer (a, b, c) un triplet Pythagoricien primitif et un entier n vérifiant $b = 2n$.
D.a. Montrer que $4n^2 = (c + a)(c - a)$.
D.b. Montrer que $r = \frac{c+a}{2}$ et $s = \frac{c-a}{2}$ sont deux entiers naturels premiers entre eux et vérifier que $n^2 = rs$.
D.c. En déduire que r et s sont des carrés.
D.d. En déduire qu'il existe deux entiers naturels non nuls u et v, premiers entre eux et de parités différentes tels que $u > v > 0$, $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ et $c = u^2 + v^2$.
D.e. Montrer que si u et v sont deux entiers naturels non nuls, premiers entre eux et de parités différentes, alors $u^2 - v^2$ et $2uv$ sont premiers entre eux. On pourra considérer un premier p qui divise à la fois $u^2 - v^2$ et $2uv$.
D.f. Conclure.

Des réponses d' élèves.

Elève 1 (réponse à la question **C.a**) :

Supposons que (a, b, c) est un triplet Pythagoricien primitif. Choisissons d un entier positif qui divise a et b, et montrons qu'il vaut 1. Il existe a_1 et b_1 tels que $a = d.a_1$ et $b = d.a_1$. Alors $(d.a_1)^2 + (d.b_1)^2 = c^2$, donc $d^2(a_1^2 + b_1^2) = c^2$, donc d divise c^2. Comme d divise c^2, on a d qui c. Donc finalement d divise a, b et c donc d vaut 1 car (a, b, c) est primitif. On a bien montré que a et b sont premiers entre eux, ce qui répond à la question.

Elève 2 (réponse à la question **C.b**) :

Montrons que les entiers a et b ne peuvent pas être tous les deux impairs. Comme ils sont impairs, il existe m et n tels que $a = 2m + 1$ et $b = 2n + 1$.
$a^2 + b^2 = 4m^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 4m + 1 = c^2$
et $4m^2 + 4m + 4n^2 + 4n + 2 = c^2$. Je peux juste en déduire que c^2 est pair. Cela doit vouloir dire que c est pair ? Et puis après je suis bloqué.

Elève 3 (réponse à la question **D.f**) :

On a supposé en début de question **D** que (a, b, c) est un triplet Pythagoricien primitif, avec b pair, puis on montre dans les questions **D.a**, **D.b**, **D.c** et **D.d** qu'il existe alors des entiers u et v avec les propriétés voulues qui vérifient les égalités $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ et $c = u^2 + v^2$ ce qui conclut bien le travail.

Les questions pour le candidat.

1. Dans l'exercice il est fait allusion au *plus grand diviseur commun à a, b et c*. Cette notion n'est pas explicitement au programme de Terminale. En adaptant simplement ce qui peut être fait en Terminale pour le pgcd de deux nombres, proposer un petit point de cours aboutissant juste à la définition du pgcd de trois nombres. Si l'on a besoin d'établir un résultat pour poser cette définition, on le fera avec soin.
2. Proposer une correction de de la question **B** .
3. Analyser la réponse de l'élève 1 en mettant en avant les principaux acquis et faiblesses. (On essaiera d'être synthétique et de se concentrer sur les points principaux.)
4. Proposer une correction complète de de la question **C.a** .
5. Proposer une correction complète de de la question **C.b** qui exploite le travail fait par l'élève 2.
6. Proposer une correction de la question **D.c** .
7. Proposer une correction de la question **D.e** .
8. Quelle est la principale faiblesse que révèle la réponse de l'élève 3 ? Proposer quelques lignes d'explications et consignes à lui donner pour qu'il puisse améliorer.

9. On cherche dans la question **9** décomposée ci-dessous les solutions des équations de la forme $a^2 + b^2 = 2^k$ avec $(a, b, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
9.1 Démontrer que si N est un multiple de 4 et que si a et b sont des entiers tels que $a^2+b^2 = N$ alors a et b sont pairs. On pourra par exemple utiliser les congruences.
9.2 En utilisant la question précédente et une récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'équation $a^2 + b^2 = 2^{2n}$ n'a pas de solution $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
9.3 Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'équation $a^2 + b^2 = 2^{2n+1}$ admet une unique solution $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ que l'on précisera.