Feuille 1 : Droite numérique - Suites convergentes.

Préparation au CAPES de mathématiques - Analyse

I Conseils

Reprenez tout d'abord les questions laissées en suspens dans les rappels de cours, elles permettent de le travailler. Egalement, il faut pouvoir retrouver rapidement les démonstrations.

Il est déconseillé de travailler cette feuille d'exercices linéairement. En particulier, il ne faut pas rester bloqué sur une partie au détriment d'une autre. On traitera en priorité à la première séance les exercices 5, 6, 7, 1, 13, 14 et 17. Ensuite, les exercices 8, 9, 2, 15 et 11. On pourra dans un premier temps ne pas tenir compte des notes de bas de page.

II Ensemble $\mathbb{R}$

Propriété de la borne supérieure.

Exercice 1. Les ensembles suivants admettent-ils un plus petit (respectivement un plus grand) élément ? Quelles sont leurs bornes inférieures et supérieures dans $\mathbb{R}$?

- a) $[0, 3[$; b) $\{0\} \cup]1, 2]$; c) $\{1 + \frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$;
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$; e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$ et f) $\{\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \mid (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\}$

Exercice 2. Démontrer que pour A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ vérifiant l'inclusion $A \subset B$ on a l'inégalité¹ $\sup_{\mathbb{R}} A \leq \sup_{\mathbb{R}} B$. Quelle est la propriété correspondante pour la borne inférieure ?

Exercice 3. Démontrer que si A et B sont deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ on a l'égalité $\sup_{\mathbb{R}}(A \cup B) = \max(\sup_{\mathbb{R}} A, \sup_{\mathbb{R}} B)$.

Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit H un sous-groupe du groupe additif $\mathbb{R}$, non réduit à 0. On définit $H' = \{x \in H \mid x > 0\}$.

1. Montrer que H' admet une borne inférieure. On la note a .
2. Montrer que si $a > 0$, alors a est dans H . Autrement dit, que a est le plus petit élément de H' . Prouver alors que H est de la forme $a\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que $H = \{az \mid z \in \mathbb{Z}\}$.
3. Montrer que si $a = 0$, alors H est une partie dense de $\mathbb{R}$.

¹Un exemple (parmi vraiment beaucoup d'autres) : pour caractériser le rayon de convergence d'une série entière, on définit des ensembles $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4$ puis on tire des inégalités du résultat de l'exercice. On montre enfin qu'il s'agit d'égalité. Voyez-vous de quoi il s'agit ?

4. *Application* Montrer que si u et v sont des réels non nuls tels que $\frac{u}{v} \notin \mathbb{Q}$, alors $u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z}$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$.
5. En déduire que si $r \in \mathbb{Q}^*$, alors $\{\cos(rn) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

III Convergence de suites : mettre la main dans les ϵ

Comprendre la définition de la convergence d'une suite de réels.

Exercice 5. Montrer en utilisant la définition de la convergence² que la suite de terme général $u_n = \frac{2n+7}{n+2}$ converge vers 2.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On suppose que les suites extraites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite (u_n) converge vers l .

Exercice 7. Montrer précisément et en revenant à la définition de la convergence que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite. Sinon, comment le montrer bien plus rapidement ?

Un critère de convergence.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels non nuls. On suppose l'existence de $l \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers l . Montrer que si $|l| < 1$, alors la suite (u_n) converge vers 0. Que peut-on dire si $|l| > 1$? Et si $l = 1$?

Moyenne de Cesaro.

Exercice 9. A toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ on associe la suite de Cesaro³ $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont le terme général est défini comme la moyenne :

$$c_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}.$$

1. Montrer que s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que u_n converge vers l , alors c_n converge vers l .
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. (*Peut-être plus difficile*) On suppose pour cette question que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de termes réels positifs. La réciproque du théorème énoncé en **1** est-elle vraie ?
4. Montrer que si la suite (u_n) tend vers $+\infty$ alors il en est de même pour la suite c_n .
5. *Exemple d'application* : On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la suite $u_{n+1} - u_n$ converge vers λ . Montrer que la suite $\frac{u_n}{n}$ converge vers λ .
6. *Quand on a bien compris la démonstration du résultat de **1** on peut s'entraîner sur cette question.* On associe cette fois à toute suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $t_n = \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k}{2^n}$. Montrez que si la suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors la suite (t_n) converge vers la même limite.

²Il s'agit d'un cas d'école pour toucher du doigt la notion de limite ; bien sûr, dans la pratique, on utilisera des théorèmes plus sophistiqués et plus rapides pour calculer les limites !

³Les suites de Césaro sont utilisées en analyse, par exemple pour étudier les séries de Fourier. Qui sait énoncer le théorème de Féjer ?

Suites et espaces vectoriels.

Rappelons que l'ensemble des suites réelles (que l'on notera ici l) est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel⁴ sur le corps $\mathbb{R}$. De quel résultat plus général est-ce un cas particulier ?

Exercice 10. Parmi les sous-ensemble suivants, préciser lesquels sont des sous-espaces vectoriel de l , et les inclusions éventuelles. Comme toujours on justifiera.

- a) l_b , le sous-ensemble des suites bornées.
- b) $l_{+\infty}$, le sous-ensemble des suites u_n qui tendent vers $+\infty$.
- c) l_0 , le sous-ensemble des suites de limite nulle.
- d) l_c , le sous-ensemble des suites convergentes.
- e) l_+ le sous-ensemble des suites qui convergent vers une limite positive.

IV Quizz

Exercice 11. Préciser pour chacune des propositions suivante si elle est vraie (en la démontrant) ou si elle est fausse (en donnant un contre-exemple). Dans tout l'exercice, on désigne par (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

- a) Si la suite (u_n) converge vers $l > 0$, alors pour tout $n \geq 0$ on a $u_n > 0$.
- b) Si la suite (u_n) converge vers 0, alors la suite de terme général $u_n v_n$ converge vers 0.
- c) Si la suite (u_n) converge vers $l \geq 0$ et si la suite (v_n) tend vers $+\infty$ alors la suite de terme général $u_n v_n$ tend vers $+\infty$.
- d) Si la suite (u_n) est bornée et si la suite de terme général $u_n v_n$ est bornée, alors la suite (v_n) est bornée.
- e) Si la suite (u_n) converge et si la suite de terme général $u_n v_n$ converge, alors la suite (v_n) converge.
- f) Si la suite (u_n) converge, alors elle est monotone à partir d'un certain rang.
- g) La suite (u_n) converge si et seulement si la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0.
- h) Les suites $(\frac{1}{n})$ et $(\frac{2}{n})$ sont adjacentes.

V Quelques études de convergence.

Suites dont on connaît une expression en fonction de n .

Exercice 12. Etudier les limites suivantes. Il faut savoir retrouver très rapidement les résultats et les démonstrations liées à ces suites très classiques.

- a) n^α (avec $\alpha \in \mathbb{Z}$, puis $\alpha \in \mathbb{R}$)
- b) a^n (avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a \in \mathbb{C}$)
- c) $\frac{a^n}{n!}$ (avec $a \in \mathbb{R}$)
- d) $\frac{a^n}{n^\alpha}$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$)
- e) $\frac{n!}{n^n}$

⁴Mais quel peut-être l'intérêt d'une telle structure ? Avez-vous un exemple ?

Exercice 13. Etudier les limites suivantes.

$$\begin{aligned} \text{a)} & \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} \text{ (sans utiliser de DL)} & \text{b)} & \frac{\cos(n) + \sqrt{n}}{n+2} \\ \text{c)} & \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n} & \text{d)} & (2 + (-1)^n)^{\frac{1}{n}} & \text{e)} & \frac{E\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)}{E\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right)} \\ \text{f)} & \sqrt{n} - E(\sqrt{n}) & \text{g)} & \prod_{k=1}^n 2^{\frac{2}{2^k}} & \text{et} & \text{h)}^5 \sin(n) \end{aligned}$$

Suites définies par une relation de récurrence

Exercice 14. *Suites de Fibonacci*⁶ On considère la suite définie par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1 strictement positifs et de la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Etudier la positivité, le sens de variation de la suite, ses limites éventuelles puis conclure.

Exercice 15. On considère la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}$. Etudier la positivité, le sens de variation de la suite, ses limites éventuelles puis conclure.

Exercice 16. *Suite de Héron*⁷ On considère la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$. Etudier la positivité de la suite, le signe de $u_{n+1} - \sqrt{a}$, le sens de variation de la suite, ses limites éventuelles et conclure.

Suites adjacentes.

Exercice 17. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \times n!}$. Montrer que ces suites sont adjacentes. Montrer que leur limite commune n'est pas un nombre rationnel. *Indication :* Si cette limite e vaut $\frac{p}{q}$, considérer $u_q < e < v_q$.

Exercice 18. *Moyenne arithmético-géométrique* On considère a_0 et b_0 deux réels positifs et on définit les deux suites réelles (a_n) et (b_n) par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

1. Justifier l'existence de ces suites.
2. Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq b_n$.
3. Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite. On note $\mu(a, b)$ cette limite.
4. Montrer que $\mu(a, b) = \mu(b, a) = \mu\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$

⁵Ici il faut faire preuve d'imagination !

⁶Les suites de Fibonacci sont des premiers exemples de suites récurrentes linéaires doubles. On peut les utiliser pour compter les lapins, le nombre d'ancêtres des hyménoptères, le nombre de façons de répartir n litres d'huile d'olive dans des tonnelets de 1 ou 2 litres, le nombre d'opérations dans l'exécution de l'algorithme d'Euclide... Savez-vous calculer le terme général de la suite en fonction de n et du nombre d'or ?

⁷Cette suite est utilisée depuis bien longtemps pour obtenir une approximation de sa limite, car sa convergence est très rapide (nous l'étudierons bientôt). Il s'agit en fait d'un cas particulier d'une méthode plus générale. Laquelle ?