Feuille 9 : Equations différentielles.

Préparation au CAPES de mathématiques - Analyse

Conseils

Avant de passer à autre chose, maîtriser le vocabulaire puis les méthodes pour les équations linéaires scalaires d'ordre 1 et 2. Dans ce but, on travaillera d'abord les exercices 1, 2, 4.1, 4.2, 6, 7 et 8.

On étudiera ensuite les équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Etudier ensuite l'utilisation des séries entières avec l'exercices 13.

Enfin, on utiliser eorème de Cauchy (exercice 19 en détails). On travaillera des méthodes classiques de résolution d'équations non linéaires sur des exemples au chapitre IV (changement de variable, équation à varaibales séparées, équation associée à une forme différentielle exacte) avec les exercices 21 et 22.

I Vocabulaire, se ramener à une équation différentielle d'ordre 1.

Vocabulaire

`Cours 1.` Il faut connaître les termes suivants que l'on rencontre dans le programme officiel. Donner pour chaucun d'eux une (ou plusieurs[1]) définitions et un exemple :
• système linéaire d'ordre 1,
• système à coefficients constants,
• système homogène à coefficients constants,
• équation linéaire scalaire,
• équation linéaire à coefficients constants,
• équation linéaire homogène à coefficients constants,
• équation non linéaire,
• équation homogène associée et
• équation à variables séparables.

On rencontre par ailleurs les termes suivant :
• équation différentielle d'ordre 1 sur une espace vectoriel E de dimension finie,
• équation différentielle scalaire d'ordre n,
• équation différentielle linéaire à coefficients constants,
• équation aux dérivées partielles[2]...

[1]Par exemple, pour certains auteurs une équation différentielle d'ordre n est de la forme $y^{(n)}+a_{(n-1)}(t)y^{(n-1)}+ ... +a_0y+b(t)$. Pour d'autres, elle sera de la forme $a_n(t)y^{(n)}+a_{(n-1)}(t)y^{(n-1)}+...+a_0y+b(t)$, et si la fonction a_n s'annule, les choses seront bien différentes.

[2]Connaissez-vous l'équation des ondes et l'équation de la chaleur ?

Que veut dire *intégrer une équation différentielle* ? Que veut-on dire par *la résolution de l'équation différentielle se ramène à m quadratures* ?

`Cours 2.` Savoir définir une solution maximale[3] d'une équation différentielle.

`Cours 3.` Qu'est-ce qu'un problème de Cauchy ? Connaître trés précisément[4] les énoncés des théorèmes de Cauchy au programme. En particulier, savoir combien de tels théorèmes sont au programme, et quelles sont les différences.

Se ramener à une équation différentielle d'ordre 1.

`Cours 4.` Comment ramener un système différentiel d'ordre n à un système différentiel d'ordre 1 ? Comment ramener un système différentiel linéaire d'ordre n à un système différentiel linéaire d'ordre 1 ? Quel est l'intérêt d'associer à des système d'ordre supérieur des systèmes d'ordre 1 ?

`Exercice 1.` Associer aux systèmes suivants des systèmes d'ordre 1.

$$\begin{aligned} \textbf{1.}\quad y^{(3)} &= \sqrt{2 + y\sin(ty' + yy'')} \\ \textbf{2.}\quad y^{(3)} &= 4y'' - 2y' + y \\ \textbf{3.}\quad y^{(3)} &= ty'' - \sin(t)y' + 3y \end{aligned}$$

II Equations linéaires scalaires d'ordre 1 et 2.

Equations linéaires scalaires d'ordre 1

`Exercice 2.` *Equations linéaires scalaires d'ordre 1 homogènes.*
1. Soit $k \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + ky = 0$.
2. Soit $(k, C) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy $y' + ky = 0$ avec comme condition initiale $y(0) = C$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(1 + x^2)y' + xy = 0$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = 2xy$.

`Exercice 3.` Soit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$. Etudier l'équation différentielle $x^k y' = y$. On pourra commencer par chercher des solutions sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. On cherchera ensuite des solutions sur $\mathbb{R}$. Dans quels cas le théorème de cauchy est-il mis en défaut ?

`Exercice 4.` *Equations linéaires scalaires d'ordre 1 avec second membre.*
1. Utiliser la méthode de la variation de la constante pour trouver les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = 2xy + e^{x^2+1}$.

---

[3] Mais d'abord, comment se présente exactement le problème, et qu'est-ce en fait qu'une solution ?

[4] On remarquera que le théorème au programme pour les équations non linéaires est une forme plus faible que celle que l'on rencontre souvent dans les livres. La fonction f qui définit l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ est supposée $\mathcal{C}^1$ et pas localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable...

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' - 3y = a$. On pourra reconnaître une solution évidente.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' - \tan(x)y = 1$.

`Exercice 5.` Etudier les solutions de l'équation différentielle

$$(1-t^2)y' - ty = 1.$$

On pourra mener une étude sur trois intervalles.

Equations linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants

`Exercice 6.` *Equations à coefficients constants* Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

$$\begin{aligned} \mathbf{1.}\quad y'' - 3y' + 2y &= 0, \\ \mathbf{2.}\quad y'' - 3y' - 2y &= 0 \text{ et} \\ \mathbf{3.}\quad y'' - 4y' + 4y &= 0. \end{aligned}$$

`Exercice 7.` *Equations à coefficients constants avec conditions initiales.* Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes avec les conditions :
1. $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = \lambda$ et $y'(0) = \mu$.
2. $y'' + y = 0$, $y(0) = \lambda$ et $y'(0) = \mu$.
3. $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$ et $y(1) = 0$.
4. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$ et $y(\frac{\pi}{2}) = 0$. Comparer avec l'exemple précédent.

`Exercice 8.` *Equations à coefficients constants avec second membre : méthode générale de la variation de la constante.* [5]
On se propose de résoudre sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'équation

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\cos^2 x}. \qquad \text{(E)}$$

1. Ecrire puis résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $Y = (y, z)$ est solution d'une équation $Y' = AY + B$, où précisera la matrice A et la fonction numérique B.
3. Ecrire l'équation homogène associée au système $Y' = AY + B$. Déduire de **1** un système fondamental de solutions de cette équation homogène.
4. Appliquer la méthode générale de variations de la constante pour résoudre (E).

[5] L'exercice est tiré des rappels de cours sur les équations différentielles rédigés par M. Deleglise. On peut consulter le document à cette adresse : http://math.univ-lyon1.fr/capes/IMG/pdf/equadiff.pdf .

Equations linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients non constants

`Exercice 9.` *Cas homogène, déduire une deuxième solution d'une première.* On cherche les solutions sur $I =]-1, +\infty[$ de l'équation (E) : $(x+1)y'' - y' - xy = 0$.
1. Vérifier que la restriction de $x \mapsto e^x$ à I est solution de (E).
2. Chercher une autre solution de (E) sous la forme $y(x) = u(x)e^x$.

`Exercice 10.` *Résoudre le cas non homogène à partir d'une solution du système homogène associé.* On cherche les solutions sur $I =]-1, +\infty[$ de l'équation (E') : $(x+1)y'' - y' - xy = e^{-x}$.
1. Ecrire le système homogène associé et vérifier que la restriction de $x \mapsto e^x$ à I en est solution.
2. Résoudre (E') en cherchant des solutions sous la forme $y(x) = u(x)e^x$. On ne cherchera pas une base de l'équation homogène[6] associée à (E) !

`Exercice 11.` On cherche les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $(3+x^2)y'' + xy' - y = 1$.
1. Ecrire le système homogène associé (E').
2. On cherche les solutions P de (E') qui soient des fonctions polynomiales. Déterminer le degré d'une telle fonction.
3. Déterminer les solutions polynomiales de (E').
4. Déterminer les solutions de (E').
5. Chercher une solution polynomiale de (E) . Résoudre (E).

`Exercice 12.` Résoudre sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 2$. On pourra chercher des solutions polynomiales.

Utilisation de développement en série entière.

`Exercice 13.` On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + xy' + y = 0$.
1. Supposons qu'une solution y de (E) soit développable en série entière sur l'intervalle $]-R, R[$ avec $R > 0$. Notons $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coefficients de ce développement, de sorte que pour $|x| < R$ on ait $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$. Prouver que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a :

$$c_{n+2} = -\frac{1}{n+2}c_n.$$

2. En déduire une expression de c_{2n} et de c_{2n+1} en fonction de n, c_0 et c_1.
3. Ecrire le développement en série entière de y si on suppose $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. On le note y_0. Ecrire de même le développement en série entière de y si on suppose $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. On le note y_1.
4. Calculer le rayon de convergence de chacune des séries définies à la question précédente.
5. Vérifier que y_0 et y_1 forment une base de l'espace des solutions de (E), et donner une expression simple de y_0.

`Exercice 14.` On considère l'équation différentielle (E) : $x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$.
1. Calculer $y(0)$.
2. Supposons qu'une solution y_0 de (E) soit développable en série entière sur l'intervalle $]-R, R[$ avec $R > 0$. Notons $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coefficients de ce développement, de sorte que pour

[6] En fait cette recherche associée à une méthode de la variation de la constante aboutirait, mais la présentation serait plus longue.

$|x| < R$ on ait $y_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$. Calculer les coefficients c_n.
3. Donner une expression simple de y_0.
4. En déduire une (droite de) solution de (E). On précisera les intervalles de validité.
5. Résoudre (E). On choisira avec précautions les intervalles. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

III Equations différentielles à coefficients constants.

`Cours 5.` Connaître les résultats concernant les équations différentielles à coefficients constants et sans second membre. Connaître le théorème donnant la forme des solutions d'une telle équation avec comme second membre une fonction polynôme exponentielle.[7]

`Exercice 15.` Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $y^{(4)} = y$ (on cherchera les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$) ,
2. $y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 0$ et
3. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ (on cherchera à nouveau les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$).

`Exercice 16.` Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes. On précisera la forme d'une solution particulière avant de procéder par identification[8].

1. $y^{(4)} = y + t + e^{2t}$,
2. $y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = (2+t)e^{t}$ et
3. $y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = (2+t)e^{-t}$

Exponentiel d'un endomorphisme

`Cours 4.` Il faut savoir définir l'exponentiel d'une matrice et l'utiliser pour résoudre des équations différentielles.

En pratique

`Exercice 17.` *Exercice guidé.* Soit $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. On cherche à résoudre le système différentiel $u' = -5u + 4v$, $v' = -9u + 7v$ avec comme conditions initales $u(0) = u_0$ et $v(0) = v_0$.
1. Donner $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ telle que le système précédent s'écrive $Y' = AY$ avec $Y = (u, v)$.
2. Calculer les valeurs propres de la matrice A. Est-elle diagonalisable ?
3. En utilisant un vecteur propre de A que l'on complètera en une base de $\mathbb{R}^2$, expliciter $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $T = P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.
4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer $(tT)^n$.
5. Calculer e^{tT}.

[7] C'était une question de cours de l'épreuve d'analyse du CAPES 2004.
[8] La méthode par identification est raisonable pour des polynômes de petits dégrés. Pour des polynômes de plus gand degré, on lui préfère la méthode du calcul symbolique (hors programme).

6. Résoudre le problème proposé.

`Exercice 18.` *Toujours guidé...* Soit $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$. On cherche à résoudre le système différentiel $u' = u - 3v$, $v' = -3u + v$, $z' = -3u - 3v + 4w$ avec comme conditions initales $u(0) = u_0$ et $v(0) = v_0$.
1. Donner $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ telle que le système précédent s'écrive $Y' = AY$ avec $Y = (u, v, w)$.
2. Montrer que A est diagonalisable. On explicitera $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$ soit diagonale.
3. Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer $(tT)^n$.
4. Calculer e^{tT}.
5. Résoudre le problème proposé.

`Exercice 19.` Résoudre sur $\mathbb{R}$ les systèmes différentiels suivants, où les fonctions sont à valeurs réelles et où t est la variable :

$$\left\{\begin{array}{cccc} x' & = & 4x & -2y \\ y' & = & x & +y \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x' & = & 2x & -y & +2z \\ y' & = & 10x & -5y & +7z \\ z' & = & 4x- & 2y & +2z \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x' & = & & y & +t^2 \\ y' & = & x & & -t^2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x' & +x & +y & = & t^2 \\ y' & +y & +z & = & t \\ z' & +z & & = & 1 \end{array}\right.$$

IV Exemples d'études d'équations différentielles.

`Exercice 19.` *Changement de variable et équation à variables séparées.* On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y' = 2ty^2 \quad \text{(E)}$$

où l'inconnue y est à valeurs réelles.
1. Montrer que les solutions de (E) ne s'annulent jamais ou alors s'annulent sur leur intervalle de définition.
2. Soit y une solution de (E) définie sur un intervalle I et qui ne s'annule pas. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que tel que

$$\forall t \in I,\ y(t) = \frac{1}{C - t^2}.$$

On notera y_C cette solution. Pour y arriver, on pourra séparer les variables, c'est-à-dire ramener (E) à une équation de la forme $\frac{y'}{g(y)} = h(t)$, puis intégrer en la variable t.
3. Déterminer pour tout $C \in \mathbb{R}$ les variations de y_C sur son ensemble de définition. On pourra distinguer les cas $C < 0$, $C = 0$ et $C > 0$.
4. Constater sur cet exemple que pour tout $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique solution maximale

de (E) qui vérifie $y(t_0) = y_0$. Pouvait-on le prévoir ? On représentera les solutions [9].

`Exercice 20.` *Changement de variable.* On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y' + y + xy^2 = 0 \quad \text{(E)}$$

où l'inconnue y est à valeurs réelles.
1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $z' - z = x$ où l'inconnue z est à valeurs réelles. Pour tout λ de $\mathbb{R}$ on note z_λ la solution qui vaut $\lambda - 1$ en 0.
2. Montrer que les solutions de (E) ne s'annulent jamais ou alors s'annulent sur leur intervalle de définition.
3. Soit y une solution de (E) qui ne s'annule jamais, et définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On pose $z = \frac{1}{y}$. Donner une équation linéaire du premier ordre vérifiée par z.
4. Etudier précisément les fonctions $y_\lambda = \frac{1}{z_\lambda}$ sur leurs ensembles de définition. Conclure et représenter les courbes intégrales.

Equation associée à une forme différentielle exacte.

`Exercice 21.` On considère l'équation

$$y^2 - x^2 + 2xyy' = 0 \quad \text{(E)}$$

où l'inconnue y est à valeurs réelles.
1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit (x_0, y_0) et (x, y) deux éléments de $\mathbb{R}^2$. En écrivant $f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0)$, exprimer $f(x,y)$ en fonction de $f(x_0,y_0)$, et d'intégrales des fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. Déterminer[10] une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - x^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy.$$

3. Montrer que le graphe d'une fonction ϕ solution sur I de (E) est contenue dans une courbe d'équation implicite $f(x,y) = C$ où $C \in \mathbb{R}$.
4. Intégrer (E).
5. Représenter les solutions[11].

Equation homogène, changement de variable.

`Exercice 22.` *Changement de variable.* On considère l'équation

$$x + 2yy' - xy'^2 = 0 \quad \text{(E)}$$

[9] Faites le ! On en apprend vraiment beaucoup. De plus, aucun doute que le jour J de grands et beaux graphes en couleurs seront appréciés et récompensé.

[10] L'équation (E) est de la forme $a(x,y) + b(x,y)y' = 0$. Les fonctions a et b ont été choisies de façon à ce qu'il existe f vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x} = a(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = b(x,y)$. C'est en fait rarement le cas. Plus généralement, on cherchera une fonction λ telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda(x,y)a(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda(x,y)b(x,y)$. Un tel λ est appelé facteur intégrant.

[11] A nouveau, consacrez à cette question tout le temps et l'attention qu'elle mérite !

où l'inconnue y est à valeurs réelles.

1. Montrer que si y est solution de (E) sur un intervalle I, alors pour tout k réel non nul la fonction $x \mapsto \frac{y(kx)}{k}$ est solution de (E) sur un intervalle J que l'on précisera. De même, montrer que $x \mapsto y(-x)$ est solution de (E) sur un autre intervalle que l'on précisera également.

2. Quelle propriété vérifie l'ensemble des courbes intégrales de (E) ?

3. Soit y une solution de (E) définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}_+^*$. On définit une fonction u sur I par $u(x) = \frac{y(x)}{x}$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par u.

4. On pose $v = u \circ \exp$ sur un intervalle convenable de sorte que $u(x) = v(t)$ avec $x = e^t$. Montrer que v vérifie l'équation différentielle

$$v'^2 = 1 + v^2 (E') \quad .$$

5. Rappeler la définition de la fonction $argsh$ et l'expression de sa dérivée (on supposera connue la fonction sh et ses variations).

6. Montrer que (E') est une équation à variables séparées, c'est-à-dire équivalente à une équation de la forme $v'(t)h(v(t)) = g(t)$. En intégrant, montrer que les solutions v de (E') vérifient

$$v(t) = \epsilon \sinh(t - t_0), \text{ avec } \epsilon \in \{1, -1\} \text{ et } t_0 \in \mathbb{R}.$$

7. En déduire que pour $x > 0$ les solutions de (E) sont de la forme

$$y(x) = \frac{C}{2}x^2 - \frac{1}{2C} \text{ avec } C \in \{e^{-t_0}, -e^{-t_0}\}.$$

8. Vérifier que ces solutions se prolongent à $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ il passe deux courbes intégrales, orthogonales entre elles, et qui sont des paraboles de foyer 0 et d'axe Oy. Représenter les courbes intégrales.

V Problèmes.

Fonctions circulaires définies comme solutions d'un système différentiel.

`Exercice 24.` Le premier problème proposé est tiré du document "Equations différentielles" mis en ligne par M. Deleglise et rédigé dans le cadre de la préparation au CAPES de l'Université de Lyon-1. Le problème propose une étude des fonctions sin et cos définies comme solutions d'un système différentiel avec conditions initiales. Bien sûr, on s'interdit dans tout le problème l'utilisation des propriétés connues que vérifient ces fonctions, puisque c'est l'objectif de les démontrer !

Etude d'une équation $y'' = f(y)$.

`Exercice 23.` On retiendra que si $y'' = f(y)$, alors $y'y'' = y'f(y)$. Et donc si on note F une primitive de f, la fonction $E(t) = \frac{y'^2(t)}{2} - F(y(t))$ est constante. Cet argument est le point de départ de l'étude du mouvement d'un pendule proposé au concours PH-M en 1996. Nous corrigerons les deux premières parties de ce problème.

2. Soit y une fonction de classe $C^2 \ : I \to \mathbb{R}$. Montrer que y est solution de (1.17) si et seulement si $Y = (y, y')$ est solution de $Y' = AY + B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^t}{\cos t} \end{pmatrix}$$

3. Expliciter un système fondamental de solutions du système homogène associé $Y' = AY$, puis appliquer la méthode générale de variation des constantes (cf. paragraphe 1.4), pour résoudre ce système.

Exercice 5 :

1. (a) Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions $x \mapsto c(x)$ et $x \mapsto s(x)$ définies sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\left\{ \begin{array}{lcr} s'(x) & = & c(x) \\ c'(x) & = & -s(x) \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} s(0) & = & 0 \\ c(0) & = & 1. \end{array} \right.$$

   (b) Montrer que $s^2(x) + c^2(x) = 1$, pour tout x.

   (c) Montrer que c est paire, et que s est impaire.

2. (a) Montrer que s et c sont de classe C^∞.

   (b) Expliciter $s^{(n)}(0)$ et $c^{(n)}(0)$ pour tout entier n.

   (c) Montrer en utilisant la formule de Taylor-Lagrange que $c(2) < 0$, et que, pour tout $x \in [0, 2]$ on a $s(x) \geq 0$.

   (d) Démontrer que c s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0, 2]$. On note π le double de l'unique racine de c sur $[0, 2]$, c'est à dire que π est l'unique réel de l'intervalle $[0, 4]$ tel que $c(\frac{\pi}{2}) = 0$.

3. (a) Montrer que s établit une bijection croissante de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$, et c une bijection décroissante de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$.

   (b) Démontrer les formules

$$\begin{array}{lcrlcr} s\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big) & = & c(x), & c\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big) & = & -s(x) \\ c(x + \pi) & = & -c(x), & s(x + \pi) & = & -s(x) \\ c(x + 2\pi) & = & c(x), & s(x + 2\pi) & = & s(x). \end{array}$$

4. (a) Montrer que si T est une période de c, alors c'est une période de s et réciproquement. Montrer que 2π est la plus petite des périodes de c (ou de s, puisque ce sont les mêmes).

5. Soit $S_1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 = 1\big\}$. Montrer que l'application $\psi \ : [0, 2\pi[\to S_1$, $t \mapsto (c(t), s(t)$ est une bijection de $[0, 2\pi[$ sur S_1.

6. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange montrer que les fonctions c et s sont développables en séries entières de rayons de convergence infini, et que,

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad c(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

7. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant la fonction exponentielle définie sur l'algèbre $\mathrm{End}(R^2)$, des endomorphismes de R^2.

EPREUVE SPECIFIQUE AU CONCOURS PH-M

Epreuve de la banque de notes pour : L'ESEM - L'ISIMA - L'ECOLE NAVALE L'ESM ST CYR - LE RESEAU EIFFEL

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Préambule

L'objectif de ce problème est d'étudier l'équation différentielle suivante, qui régit le mouvement d'un pendule :

$$(1) \qquad x'' + \omega^2 \sin x = 0$$

où ω est un nombre réel strictement positif et $t \mapsto x(t)$ est une fonction de la variable réelle t.

On considère le problème de Cauchy

$$(2) \qquad x'' + \omega^2 \sin x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = a,$$

où a est un nombre réel.

Dans la première partie, on montre que l'unique solution maximale $t \mapsto \varphi(t)$ du problème de Cauchy (2) est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et qu'elle est impaire. Dans la seconde partie, on détermine les trois types de mouvement possibles, selon le signe de $a - 2\omega$. Dans la troisième partie, on approfondit l'étude du cas où le mouvement est périodique.

PREMIERE PARTIE

1. a) Montrer que le problème de Cauchy (2) admet une solution maximale φ et une seule, définie sur un intervalle ouvert $I =]\beta, \gamma[$ contenant 0. Que peut-on dire d'une solution ψ de (2) définie sur un intervalle J contenant 0 ?

   b) Montrer que φ est de classe C^∞ sur I.

   c) Déterminer φ lorsque $a = 0$.

2. a) Montrer que la fonction $t \mapsto \varphi'^2(t) - 2\omega^2 \cos\varphi(t)$ est constante sur I et égale à $a^2 - 2\omega^2$.

   b) En déduire que φ' est bornée sur I.

3 . On se propose de prouver que $I = \mathbb{R}$. A cet effet, on raisonne par l'absurde en supposant, par exemple, que γ est un nombre réel.

a) Montrer que φ admet une limite finie lorsque t tend vers γ par valeurs inférieures.

b) En déduire que φ'', puis φ', admet une limite finie lorsque t tend vers γ par valeurs inférieures.

c) Prouver que φ se prolonge en une fonction de classe C^2 sur $]\beta, \gamma]$.

d) Démontrer finalement que $I = \mathbb{R}$.

4 . a) Déterminer en fonction de φ la solution maximale du problème de Cauchy

$$(3) \qquad x'' + \omega^2 \sin x = 0, \quad x(\delta) = 0, \quad x'(\delta) = a,$$

où δ est un instant donné.

b) Prouver que φ est une fonction impaire.

c) Déterminer en fonction de φ la solution maximale du problème de Cauchy

$$x'' + \omega^2 \sin x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -a.$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que a est strictement positif.

DEUXIEME PARTIE

1 . Montrer que si φ' s'annule à l'instant α, où α appartient à $\mathbb{R}$, alors a appartient à $]0, 2\omega]$.

2 . **Etude du cas où $a = 2\omega$.**

a) On se propose de montrer que, pour tout nombre réel t, $\varphi(t)$ appartient à $]-\pi, \pi[$. Pour cela, on suppose par l'absurde qu'il existe un instant δ tel que $\varphi(\delta) = \pi$. Montrer que $\varphi'(\delta) = 0$. Etablir que φ est constante (on pourra utiliser l'unicité des solutions d'un problème de Cauchy associé à (1) à l'instant δ). Conclure.

b) Prouver que, pour tout nombre réel t, $\varphi'(t) > 0$.

En déduire que φ est la solution maximale sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$x' = 2\omega \cos \frac{x}{2}, \quad x(0) = 0.$$

c) Expliciter cette solution φ, étudier ses variations et son comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$.

3 . **Etude du cas où $a > 2\omega$.**

a) Prouver que, pour tout nombre réel t, $\varphi'(t) \geq \sqrt{m}$, où $m = a^2 - 4\omega^2$. Etablir que φ est un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

En déduire que φ est la solution maximale sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$x' = \sqrt{m + 2\omega^2(1 + \cos x)}, \quad x(0) = 0.$$

b) Soit ψ la fonction réciproque de φ. Montrer que pour tout nombre réel θ,

$$\psi(\theta) = \int_0^\theta \frac{du}{\sqrt{m + 2\omega^2(1 + \cos u)}}.$$

On pose $T = \psi(2\pi)$. Prouver que, pour tout nombre réel θ, $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta) + T$; en déduire que, pour tout nombre réel t, $\varphi(t + T) = \varphi(t) + 2\pi$.

4. Etude du cas où $a < 2\omega$.

a) Prouver qu'il existe un nombre réel α et un seul appartenant à $]0, \pi[$ tel que, pour tout nombre réel t, $\varphi'^2(t) = 2\omega^2(\cos \varphi(t) - \cos \alpha)$.

b) Soit ψ la fonction définie sur $]-\alpha, \alpha[$ par :

$$\psi(\theta) = \int_0^\theta \frac{du}{\sqrt{2\omega^2(\cos u - \cos \alpha)}}.$$

Prouver que ψ admet une limite finie, notée τ, lorsque θ tend vers α. Etablir enfin que ψ est un difféomorphisme de classe C^∞ de $]-\alpha, \alpha[$ sur $]-\tau, \tau[$.

c) On note χ l'application réciproque de ψ. Montrer que χ est solution du problème de Cauchy (2) sur l'intervalle $]-\tau, \tau[$, et se prolonge en une fonction de classe C^2 sur $[-\tau, \tau]$, encore notée χ. Prouver que la restriction de φ à $[-\tau, \tau]$ est égale à χ.

d) Soit $\hat{\chi}$ la fonction définie sur $[\tau, 3\tau]$ par $\hat{\chi}(t) = -\chi(t - 2\tau)$. Prouver que $\hat{\chi}$ est solution sur $[\tau, 3\tau]$ d'un problème de Cauchy associé à l'équation (1) à l'instant τ. En déduire que la restriction de φ à $[\tau, 3\tau]$ est égale à $\hat{\chi}$.

e) Soit $\hat{\varphi}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\hat{\varphi}(t) = \varphi(t + 2\tau)$. Prouver que $\hat{\varphi} = -\varphi$; en déduire que φ est 4τ-périodique.

f) Déterminer en fonction de τ les nombres réels t tels que $\varphi(t) = 0$, puis les nombres réels t tels que $\varphi'(t) = 0$.

g) Donner l'allure de φ sur l'intervalle $[-\tau, 3\tau]$, dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

TROISIEME PARTIE

Dans cette partie, on suppose que $a < 2\omega$. Pour tout élément α de $]0, \pi[$, on pose :

$$T(\alpha) = 4\int_0^\alpha \frac{du}{\sqrt{2\omega^2(\cos u - \cos \alpha)}}.$$

On note f la fonction définie sur $]-1, 1[$ par :

$$f(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \lambda^2 \cos^2 \theta}}.$$

1. Développement de f en série entière.

a) Montrer que la fonction $\upsilon \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2}}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et expliciter ce développement, que l'on écrira sous la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \upsilon^{2n}$.