Kit de survie sur les équations différentielles.

Au programme

Au programme de l'épreuve 1 du Capes, qui vous concerne, on trouve :

Calcul intégral et Équations différentielles.

Intégrale d'une fonction continue sur un segment, sommes de Riemann. Calculs de primitive. Intégration par parties, changement de variable. Formule de Taylor avec reste intégral. Intégrales généralisées. Équations différentielles linéaires du premier ordre, du premier ordre à variables séparables, linéaires du second ordre à coefficients constants.

Au nouveau programme de Terminale Spécilalité on trouve

- Équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel ; allure des courbes. Équation différentielle $y' = ay + b$.

Capacités attendues

- Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence et les fonctions de la forme $(v' \circ u) \times u'$.
- Pour une équation différentielle $y' = ay + b$, $(a \neq 0)$: déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer toutes les solutions.
- Pour une équation différentielle $y' = ay + f$: à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions.

mais aussi

Pour travailler le concept d'équation différentielle, on peut donner d'autres exemples d'équations différentielles, dont on peut donner des solutions sans en faire de résolution complète : $y' = y^2$, $y'' + \omega^2 y = 0$. Aucune connaissance n'est exigible sur ces exemples.

Le programme de TSTI2D est trés proche sur ces points. Au programme des classes de BTS on trouve

Équations linéaires du premier ordre Équation différentielle $ay'+by = c(t)$ où a, b sont des constantes réelles et c une fonction continue à valeurs réelles.	• Représenter à l'aide d'un logiciel la famille des courbes représentatives des solutions d'une équation différentielle. • Résoudre une équation différentielle du premier ordre : – à la main dans les cas simples ; – à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les cas. • Déterminer la solution vérifiant une condition initiale donnée : – à la main dans les cas simples ; – à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les cas.	On présente sur un exemple la résolution approchée d'une équation différentielle par la méthode d'Euler. Les indications permettant d'obtenir une solution particulière sont données. En liaison avec les autres disciplines, on peut étudier des exemples simples de résolution d'équations différentielles non linéaires, du premier ordre à variables séparables, par exemple en mécanique ou en cinétique chimique, mais ce n'est pas un attendu du programme. ⇆ Loi de refroidissement, cinétique chimique.

ainsi que

Équations linéaires du second ordre à coefficients réels constants Équation différentielle $ay''+by'+cy = d(t)$ où a, b et c sont des constantes réelles et d une fonction continue à valeurs réelles.	• Représenter à l'aide d'un logiciel la famille des courbes représentatives des solutions d'une équation différentielle. • Résoudre une équation différentielle du second ordre : – à la main dans les cas simples ; – à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les cas. • Déterminer la solution vérifiant des conditions initiales données : – à la main dans les cas simples ; – à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les cas.	La fonction d est une fonction polynôme ou du type : $t \mapsto e^{\alpha t}$; $t \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$; $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$. Les indications permettant d'obtenir une solution particulière sont données. ⇆ Résistance des matériaux, circuit électronique.

mézaussi :

		pertinence de ce théorème.
Transformée de Laplace d'une dérivée.	• Exploiter la transformation de Laplace pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants.	Pour le second membre, on se limite au cas où les fonctions données ou recherchées sont : – soit des combinaisons linéaires à coefficients réels de fonctions de la forme $t \mapsto U(t-\alpha)$ et $t \mapsto tU(t-\alpha)$; – soit de la forme $t \mapsto U(t-\alpha)e^{rt}$; où α est un nombre réel positif et r un réel. ⇆ Fonction de transfert d'un système linéaire. Application à la stabilité.

I Equations différentielles du premier ordre

`Exercice 1.` *Equations linéaires scalaires d'ordre 1 homogènes.*
1. Soit $k \in \mathbb{R}^*$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution y de l'équation $y' + ky = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec comme condition initiale $y(t_0) = y_0$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = 2xy$.
4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(1 + x^2)y' + xy = 0$.

`Exercice 2.` *Equations linéaires scalaires d'ordre 1 avec second membre.*
1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' - 3y = a$. On pourra reconnaître une solution évidente.
2. Utiliser la méthode de la variation de la constante pour trouver les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = 2xy + e^{x^2+1}$ (E). On rappelle que cette méthode consiste à chercher une solution de (E) sous la forme $y(x) = \lambda(x)u(x)$ où u est une solution de l'équation homogène associée à (E).
3. Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle $y' - \tan(x)y = 1$.

`Exercice 3.` Redémontrer le Théorème 2 en utilisant la méthode de la variation de la constante.

II Equations différentielles du second ordre

`Exercice 4.` *Equations à coefficients constants* Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.
1. $y'' - 3y' + 2y = 0,$
2. $y'' + y' + y = 0,$
3. $y'' - 4y' + 4y = 0$
3. $y'' + \omega^2 y = 0$ (évoqué dans le programme de Terminale)
4. Remarquer que dans chacun des cas, pour tout choix de $t_0 \in \mathbb{R}$ et de $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique solution y vériant $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$.

`Exercice 5.` *Cas homogène, déduire une deuxième solution d'une première.* On cherche les solutions sur $I =]-1, +\infty[$ de l'équation (E) : $(x+1)y'' - y' - xy = 0$.
1. Vérifier que la restriction de $x \mapsto e^x$ à I est solution de (E).
2. Chercher une autre solution de (E) sous la forme $y(x) = u(x)e^x$.

III Equations différentielles à variables séparables

`Exercice 6.` On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' = 2ty^2$ (E) avec la condition initiale $y(0) = -1$.
1⋆ . Montrer en utilisant le théorème de Cauchy que les solutions de (E) ne s'annulent jamais ou alors s'annulent sur leur intervalle de définition.
2. Montrer que le problème cherché admet une unique solution, qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in I,\ y(t) = \frac{-1}{1+t^2}$.
3. Chercher les solutions y de l'équation différentielle (E) telles que $y(0) = 1$ et définies sur l'intervalle le plus grand possible.

IV Plus intéressant : exemples de problèmes avec analyse et synthèse

`Exercice 7.` On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on ait $f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt$.
1. On suppose que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifie les conditions, et que f n'est pas la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est en fait dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est impaire.
4. Calculer $f(0)$ et montrer que $f'(0) = 2$.
5. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f'(x)f''(y) = f'''(x)f(y)$.

6. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f soit solution de l'équation $f'' + \alpha f = 0$, puis déterminer en fonction de α une expression de f.
7. Conclure.

Utilisation de développement en série entière.

`Exercice 8.` On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + xy' + y = 0$.
1. Supposons qu'une solution y de (E) soit développable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ avec $R > 0$. Notons $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coefficients de ce développement, de sorte que pour $|x| < R$ on ait $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$. Prouver que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a :

$$c_{n+2} = -\frac{1}{n+2} c_n.$$

2. En déduire une expression de c_{2n} et de c_{2n+1} en fonction de n, c_0 et c_1.
3. Ecrire le développement en série entière de y si on suppose $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. On le note y_0. Ecrire de même le développement en série entière de y si on suppose $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. On le note y_1.
4. Calculer le rayon de convergence de chacune des séries définies à la question précédente.
5 $\star$. Vérifier que y_0 et y_1 forment une base de l'espace des solutions de (E), et donner une expression simple de y_0. (Nécessite un th. de Cauchy...sans ce théorème on peut déjà montrer que la famille est libre.)

Théorèmes à connaître.

Dans les énoncés qui suivent, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Théorème 1. Equation (scalaire) du 1er ordre à coefficient(s) constant(s) :

Si a est un réel, l'ensemble des fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall t \in I,\ y'(t) + ay(t) = 0$ est l'ensemble des fonctions définies sur I par $t \mapsto \lambda e^{-at}$ où λ décrit $\mathbb{R}$.

Théorème 2. Equation (scalaire) homogène du 1er ordre :

Si $a : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, admettant A comme primitive sur I, alors l'ensemble des fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = 0$ est l'ensemble des fonctions définies sur I par $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ où λ décrit $\mathbb{R}$.

Théorème 3. Equation (scalaire) du second ordre à coefficients constants :

Si a, b et c sont trois réels, avec $a \neq 0$, et si on note Δ le discriminant du polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors on décrit en fonction du signe de Δ et des racines de P l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions réelles, définies sur I, dérivables deux fois et solutions de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$:

<u>Si $\Delta > 0$:</u> avec r_1 et r_2 les deux racines réelles de P on a $\mathcal{S} = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

<u>Si $\Delta = 0$:</u> avec r racine double de P on a $\mathcal{S} = \{t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{rt} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

<u>Si $\Delta < 0$:</u> avec $r + i\omega$ et $r - i\omega$ les deux racines complexes conjuguées de P, on a $\mathcal{S} = \{t \mapsto \lambda e^{rt} \cos(\omega t) + \mu e^{rt} \sin(\omega t) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

Pour aller plus loin : le théorème de Cauchy, version non-linéaire. (HP)

Théorème de Cauchy :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.

On cherche les fonctions y solutions de $y' = f(t, y)$ vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

• Pour tout $(t_0, y_0) \in U$ il existe une unique solution maximale (c'est-à-dire que l'on ne peut pas prolonger sur un intervalle strictement plus grand) $y : I \to \mathbb{R}^n$ définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0.

• Si pour $(t_0, y_0) \in U$ on a deux solutions du problème $y : I \to \mathbb{R}^n$ et $z : J \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $y(t_0) = z(t_0) = y_0$, alors $y = z$ sur $I \cap J$.