Feuille 1 : Droite numérique - Suites convergentes.

Master Enseignement Mathématiques - Analyse 1

I Ensemble $\mathbb{R}$

Relations d'ordre

`Exercice 1.` Les relations binaires suivantes : $|$ sur $\mathbb{N}^*$, $|$ sur $\mathbb{Z}^*$, $\subset$ sur l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E, $<$ sur $\mathbb{R}$, $\leq$ sur $\mathbb{R}$, $\geq$ sur $\mathbb{R}$, et $\leq$ sur l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ noté $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont-elles des relations d'ordre ? Lorsque ce sont des relations d'ordre, préciser si elles définissent un ordre total.

Propriété de la borne supérieure

`Exercice 2.` Soit A une partie de $\mathbb{R}$ qui admet M comme plus grand élément. Montrer que M est également borne supérieure de A. Peut-on énoncer une réciproque ?

`Exercice 3.` Les ensembles suivants admettent-ils un plus petit (respectivement un plus grand) élément ? Admettent-ils une borne inférieure (respectivement supérieure) dans $\mathbb{R}$, et si oui laquelle ?

a) $\mathbb{N}$; b) $\mathbb{Z}$; c) $[0,3[$; d) $\{0\}\cup]1,2]$; e) $\{5-\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$;
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$; g) $\{(-1)^n n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et h) $\{\frac{1}{m}-\frac{1}{n} \mid (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\}$.

`Exercice 4.` Démontrer que pour A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ vérifiant l'inclusion $A \subset B$ on a l'inégalité $sup_{\mathbb{R}}\ A \ \leq\ sup_{\mathbb{R}}\ B$ [1] . Pour commencer, on pourra comparer pour l'inclusion les ensembles $\mathcal{M}_A$ et $\mathcal{M}_B$ des majorants de A et B respectivement. Quelle est la propriété correspondante pour la borne inférieure ?

`Exercice 5.` Démontrer que si A et B sont deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ on a l'égalité $sup_{\mathbb{R}}(A \cup B) = max(sup_{\mathbb{R}}\ A, sup_{\mathbb{R}}\ B)$.

II Convergence de suites : mettre la main dans les ϵ

1. Un exemple (parmi vraiment beaucoup d'autres) : pour caractériser le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ on définit des ensembles $A_1 = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \sum |a_n| r^n$ converge $\}$, ... et $A_4 = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid a_n r^n$ bornée $\}$ tels que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4$. Puis, on tire des inégalités du résultat de l'exercice. On montre enfin qu'il s'agit d'égalités.

Comprendre la définition de la convergence d'une suite de réels

`Exercice 6.` Montrer <u>en utilisant la définition</u> de la convergence ou de la divergence d'une suite[2] que :
a) la suite de terme général $u_n = \frac{2}{\sqrt{n}+1}$ converge vers 0,
b) la suite de terme général $w_n = \frac{n+6\pi}{2n+3}$ converge vers $\frac{1}{2}$,
c) la suite de terme général $u_n = \frac{3\cos^2(n)}{n^2+5}$ converge vers 0 et que
d) la suite de terme général $x_n = 8n^2 - 13$ diverge vers $+\infty$.

`Exercice 7.` Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On suppose que les suites extraites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$. En vous ramenant à la définition, montrer que la suite (u_n) converge vers l.

`Exercice 8.` Soit $l \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers l. Montrer que les termes de la suite sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

`Exercice 9.` *Définition de la convergence d'une suite au lycée.*
1. Chercher dans les programmes des classes de Première Scientifique, de Terminale Scientifique, et de Terminale STI2D en vigueur comment la convergence d'une suite est définie.
2. Montrer l'équivalence entre la définition donnée en Terminale S et la définition du supérieur en termes de *epsilon*. (Vous devez vous poser la question : quelle est la méthode pour montrer que deux définitions sont équivalentes ?)
3. Démontrer l'unicité de la limite d'une suite à l'aide de la définition donnée en Terminale S.
4. Démontrer le théorème des gendarmes à l'aide de la définition donnée en Terminale S.
5. Soit $l \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers l. Donner une démonstration accessible à des élèves de Terminale S du fait que les termes de la suite sont strictement positifs à partir d'un certain rang.
6. Montrer l'équivalence entre la définition donnée en Terminale STI2D et la définition du supérieur en termes de *epsilon*.

`Exercice 10.` Dans un cours (douteux) de L1 Maths, on trouve la définition suivante :

> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, et l un réel. On dit que la suite (u_n) converge vers l si
> $\forall \epsilon \geq 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon)$

Que pensez-vous de cette définition ?

`Exercice 11.` *Une question de cours donnée aux écrits du Capes 2015*
1. Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle croissante et non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
2. Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle croissante et majorée, alors elle converge.
3. Etablir une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite rélle décroissante soit convergente.

`Exercice 12.` *Une question de l'Examen intermédiaire 2011.* Que peut-on dire de la somme d'une suite réelle bornée et d'une suite réelle divergente vers $-\infty$? Le démontrer en se ramenant à la définition d'une suite divergente vers $-\infty$.

2. Il s'agit de cas d'école pour bien comprendre la notion de limite, pour manipuler et toucher du doigt la définition en termes de ϵ ; bien sûr, dans la pratique, on utilisera des théorèmes plus sophistiqués et plus performants pour calculer les limites !

`Exercice 13.` *Une question de l'Examen intermédiaire 2011.* On considère deux suites de réels strictement positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui divergent vers $+\infty$. On suppose qu'une suite réelle $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall (k,n)\in\mathbb{N}^2,\quad 0\le w_n\le \frac{v_k}{u_n}+\frac{1}{v_k}.$$

Montrer que (w_n) converge vers 0.

Un critère de convergence

`Exercice 14.` **Théorème ou règle de D'Alembert.** Il existe plusieurs versions du théorème ou de la règle de D'Alembert : une pour les suites, une pour les séries, une pour les séries entières... Ici on s'intéresse au cas des suites. Commençons par le cas des suites positives. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose l'existence de $l\in\mathbb{R}_+$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers l.

1. On considère un réel l' tel que $l'>l$. Montrer qu'il existe un entier N tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\ge N\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}\le l' \quad .$$

2. En déduire que $\forall n\in\mathbb{N},\ n\ge N\Rightarrow 0\le u_n\le l'^{n-N}u_N$.

3. On suppose maintenant que $l<1$: conclure en utilisant ce qui précède à la convergence de (u_n) vers 0 (on récapitulera proprement).

4. On suppose maintenant que $l>1$. Montrer que pour tout réel l' tel que $l'<l$ il existe un entier N tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ n\ge N\Rightarrow u_n\ge l'^{n-N}u_N$. En déduire que u_n diverge vers $+\infty$.

5. Montrer que si $l=1$, il se peut que (u_n) converge ou diverge.

6. En déduire une version du théorème de D'Alembert pour les suites réelles (pas forcément positives) ou complexes.

Moyenne de Cesaro (tombé au Capes 2015)

`Exercice 15.` A toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ on associe la suite de Cesaro[3] $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme général est défini comme la moyenne :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ c_n \ = \ \frac{u_1+\ldots+u_n}{n}.$$

On se propose de montrer le théorème de Cesaro : si la suite (u_n) converge vers un réel l, alors c_n converge également vers l.

1. Montrer que pour tout $l\in\mathbb{R}$ et tout $(n,n_0)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ tels que $n>n_0$ on a

$$|c_n-l|\le \frac{\sum_{k=1}^{n_0}|u_k-l|}{n}+\frac{\sum_{k=n_0+1}^{n}|u_k-l|}{n}.$$

2. On suppose que (u_n) converge vers un réel l. Montrer que pour tout $\epsilon\in\mathbb{R}_+^*$ il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad n\ge n_0\Rightarrow \frac{\sum_{k=n_0+1}^{n}|u_k-l|}{n}\le\frac{\epsilon}{2}.$$

3. Conclure proprement.

4. La réciproque du théorème de Cesaro est-elle vraie ?

3. Les suites de Césaro sont utilisées en analyse, par exemple pour étudier les séries de Fourier. Qui sait énoncer le théorème de Féjer ?

5. (*Peut-être plus difficile*) Trouver un contre-exemple à la réciproque du théorème de Cesaro avec une suite à termes positifs.
6. Montrer que si la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ alors il en est de même pour la suite c_n. On pourra s'inspirer de la démonstration du théorème de Cesaro.
7. *Exemple d'application :* On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que la suite $u_{n+1} - u_n$ converge vers λ. Montrer que la suite $\frac{u_n}{n}$ converge vers λ. Que peut-on dire en terme *d'équivalents* ?
8. *Quand on a bien compris la démonstration du théorème de Cesaro on peut s'entraîner sur cette question plus difficile.* On associe cette fois à toute suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $t_n = \frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k}{2^n}$. Montrez que si la suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors la suite (t_n) converge vers la même limite.

Suites et espaces vectoriels

Rappelons que l'ensemble des suites réelles (que l'on notera ici l) est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel[4] sur le corps $\mathbb{R}$. De quel résultat plus général est-ce un cas particulier ?

`Exercice 16.` Parmi les sous-ensemble suivants, préciser lesquels sont des sous-espaces vectoriel de l, et les inclusions éventuelles. Comme toujours on justifiera.

a) l_b, le sous-ensemble des suites bornées.
b) $l_{+\infty}$, le sous-ensemble des suites u_n qui tendent vers $+\infty$.
c) l_0, le sous-ensemble des suites de limite nulle.
d) l_c, le sous-ensemble des suites convergentes.
e) l_+ le sous-ensemble des suites qui convergent vers une limite positive.

III Quizz

`Exercice 17.` Préciser pour chacune des propositions suivante si elle est vraie (en la démontrant) ou si elle est fausse (en donnant un contre-exemple). Dans tout l'exercice, on désigne par (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

a) Si la suite (u_n) converge vers $l > 0$, alors pour tout $n \geq 0$ on a $u_n > 0$.
b) Si la suite (u_n) converge vers 0, alors la suite de terme général $u_n v_n$ converge vers 0.
c) Si la suite (u_n) converge vers $l \geq 0$ et si la suite (v_n) tend vers $+\infty$ alors la suite de terme général $u_n v_n$ tend vers $+\infty$.
d) Si la suite (u_n) est bornée et si la suite de terme général $u_n v_n$ est bornée, alors la suite (v_n) est bornée.
e) Si la suite (u_n) converge et si la suite de terme général $u_n v_n$ converge, alors la suite (v_n) converge.
f) Si la suite (u_n) converge, alors elle est monotone à partir d'un certain rang.
g) La suite (u_n) converge si et seulement si la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0.
h) Les suites $\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\left(\frac{2}{n}\right)$ sont adjacentes.

4. Mais quel peut-être l'intérêt d'une telle structure ? On peut trouver un exemple dans le programme de Terminale S spécialité.

IV Quelques études de convergence.

Suites dont on connaît une expression en fonction de n

`Exercice 18.` *Du cours !* Etudier les limites suivantes. Il faut savoir retrouver très rapidement les résultats et les démonstrations liées à ces suites très classiques. Il faut souvent distinguer plusieurs cas.

$$\textbf{a)}\ n^{\alpha} \text{ (avec } \alpha \in \mathbb{Z}, \text{ puis } \alpha \in \mathbb{R}) \quad \textbf{b)}\ a^n \text{ (avec } a \in \mathbb{R} \text{ ou } a \in \mathbb{C})$$
$$\textbf{c)}\ \frac{a^n}{n!} \text{ (avec } a \in \mathbb{R}) \quad \textbf{d)}\ \frac{a^n}{n^{\alpha}} \text{ (avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}) \text{ et } \textbf{e)}\ \frac{n!}{n^n}.$$

`Exercice 19.` Etudier les limites des suites de terme général :

$$\textbf{a)}\ \frac{4n^2-n+6}{n^2-5} \quad \textbf{b)}\ \ln(e^3 n+4)-\ln(n+6)$$
$$\textbf{c)}\ \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n} \text{ (sans utiliser de DL)} \quad \textbf{d)}\ \frac{\sin(n)+\sqrt{n}}{n+4}$$
$$\textbf{e)}\ \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n} \quad \textbf{f)}\ \big(2+(-1)^n\big)^{\frac{1}{n}} \quad \textbf{g)}\ \frac{E\big((n+\frac{1}{2})^2\big)}{E\big((n-\frac{1}{2})^2\big)}$$

h)[5] $\sqrt{n}-E(\sqrt{n})$ et **i)** $\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{2}{2^k}}$.

`Exercice 20.` *Très proche d'un exercice donné aux écrits du Capes 2015.* L'objectif de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite $\sin(n\theta)$ en fonction de $\theta \in \mathbb{R}$.
1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite de terme général $e^{in\theta}$ converge si et seulement si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. *Indication :* on pourra utiliser l'égalité $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{i(n+1)\theta} = e^{i\theta}e^{in\theta}$ et passer à la limite.
2. Pour cette question et la suivante, on suppose $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Montrer que la convergence de la suite $\sin(n\theta)$ entraine celle de la suite de terme général $\cos(n\theta)$. *Indication :* On pourra utiliser une expression de $\sin((n+1)\theta)$ en fonction de $\cos(n\theta)$.
3. En déduire que la convergence de la suite de terme général $\sin(n\theta)$ entraine celle de la suite $e^{in\theta}$.
4. Conclure.

Suites définies par une relation de récurrence

`Exercice 21.` *Suites de Fibonacci*[6] On considère la suite définie par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1 strictement positifs et de la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Etudier la positivité, le sens de variation de la suite, ses limites éventuelles puis conclure.

`Exercice 22.` On considère la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2+1}$. Etudier la positivité, le sens de variation de la suite, ses limites éventuelles puis conclure.

---

5. Pas forcément évident...si vous bloquez, calculez plusieurs termes pour comprendre ce qui se passe.
6. Les suites de Fibonacci sont des premiers exemples de suites récurrentes linéaires doubles. On peut les utiliser pour compter les lapins, le nombre d'ancêtres des hyménoptères, le nombre de façons de répartir n litres d'huile d'olive dans des tonnelets de 1 ou 2 litres, le nombre d'opérations dans l'exécution de l'algorithme d'Euclide... Savez-vous calculer le terme général de la suite en fonction de n et du nombre d'or ?

`Exercice 23.` *Suite de Héron*[7] On considère la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$. Etudier la positivité de la suite, le signe de $u_{n+1} - \sqrt{a}$, le sens de variation de la suite, ses limites éventuelles et conclure.

Suites adjacentes.

`Exercice 24.` On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \times n!}$.
1. Montrer que ces suites sont adjacentes.
2. Montrer que leur limite commune n'est pas un nombre rationnel. *Indication :* Si cette limite e vaut $\frac{p}{q}$, considérer $u_q < e < v_q$ pour aboutir à une contradiction.
3. Quel est le type de raisonnement utilisé pour répondre à la question précédente ? En proposer un exemple accessible à une classe de lycée (on précisera le niveau).

`Exercice 25.` *Moyenne arithmético-géométrique* On considère a_0 et b_0 deux réels positifs et on définit les deux suites réelles (a_n) et (b_n) par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

1. Justifier l'existence de ces suites.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leq b_n$.
3. Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite. On note $\mu(a, b)$ cette limite.
4. Montrer que $\mu(a, b) = \mu(b, a) = \mu(\sqrt{ab}, \dfrac{a + b}{2})$.

Un exemple de dossier.

`Exercice 26.` Vous trouverez à la page suivante un exemple de dossier : il s'agit du deuxième type d'épreuve à l'oral du Capes.

7. Cette suite est utilisée depuis bien longtemps pour obtenir une valeur approchée de sa limite, car sa convergence est très rapide (nous l'étudierons dans la feuille 2). Il s'agit en fait d'un cas particulier d'une méthode plus générale. Laquelle ?

Thème : suites numériques.

Un extrait du programme de Terminale S.

Pour exprimer que (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on dit que ≪ tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ≫.

L'exercice.

Avant d'avoir étudié les opération algébriques sur les limites, on donne lors de travaux dirigés l'exercice suivant :

On considère la suite (u_n) telle que pour tout entier n on ait $u_n = n^2 + n - \sqrt{n} - 3$.
1. Calculer certains termes de la suite à l'aide d'un tableur : quelle conjecture peut-on faire ?
2. Démontrer cette conjecture. On essaiera de vérifier précisément la définition donnée en cours.

La réponse de deux élèves à la question 2.

Elève 1. Pour un entier n, si on a $n^2 + n - \sqrt{n} - 3 \geq A$, alors on a $n^2 \geq A + 3$ car comme $n \geq 1$ on a $n \geq \sqrt{n}$.
On a donc $n^2 - 3 \geq A$, et on peut prendre $A = n^2 - 3$ pour que la définition soit vérifiée.

Elève 2. On choisit un intervalle de la forme $]A, +\infty[$. On cherche quand u_n est dans cet intervalle, donc quand u_n est $\geq A$. Si $u_n \geq A$, alors $n^2 + n - \sqrt{n} - 3 \geq A$, donc $n^2 \geq A + \sqrt{n} - n + 3$. On sait que pour tout $x \geq 0$ on a $x \geq \sqrt{x}$ donc $n^2 \geq A + 3$ donc $n \geq \sqrt{A+3}$. On a vérifié la définition du cours, car u_n est plus grand que A à partir du rang $\sqrt{A+3}$.

Le travail à exposer devant le jury.

1- Analyser la réponse des élèves.
2- Proposer une correction de la question **2.** de l'exercice telle que vous la présenteriez à la classe.
3- Présenter deux ou trois exercices sur le thème *Suites numériques* dont au moins un soit lié à une application concrète.