Feuille 3 - Fonctions d'une variable réelle : continuité et dérivabilité.

MEEF second degré Mathématiques - Analyse

Certans exercices de la feuille sont inspirés d'exercices ou d'exemples donnés dans les grands classiques d'Analyse d' Arnaudiès et Fraysse, Moisan et Monier.

I Continuité.

Limites, continuité.

`Exercice 1.` *Un exercice très formateur.* Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et une fonction $f : D \to \mathbb{R}$. Montrer que si f admet pour limite l en a, et si $l > 0$, alors il existe un voisinage V de a dans D sur lequel f est strictement positive. Montrer que si $l \neq 0$, alors il existe un voisinage V de a dans D sur lequel f ne s'annule pas.

`Exercice 2.` *Encore un exercice très formateur.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f admet des limites l et l' en $-\infty$ et $+\infty$. On souhaite montrer très précisément que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
1. Montrer l'existence de $A \in \mathbb{R}$ tel que f soit bornée sur l'intervalle $[A, +\infty[$.
2. Conclure.

`Exercice 3.` *Tombé au Capes 2014 !* Montrer que toute fonction continue $f : [a, b] \to [a, b]$ admet au moins un point fixe. On pourra introduire une fonction intermédiaire bien choisie.

`Exercice 4.` Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on ait $f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

`Exercice 5.` Soit a et b deux réels. Montrer que $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$. En déduire que si f et g sont deux fonctions réelles définies sur un intervalle I, alors la fonction $\max(f, g)$ est continue.

`Exercice 6.`
1. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair. Montrer qu'il admet au moins une racine réelle.
3. Montrer que pour tout entier d pair, il existe un polynôme de degré d à coefficients dans $\mathbb{R}$ sans racines réelles.
2. Montrer que le résultat de la question **1** est optimal en le sens suivant : pour tout d entier positif impair il existe un polynôme de degré d admettant une unique racine réelle qui est simple.

`Exercice 7.` *Fonctions périodiques.*
1. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et périodique est bornée.

2. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique admettant une limite en $+\infty$ est constante.

`Exercice 8.`
1. On souhaite étudier la continuité de la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ notée $1_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x irrationel associe 0 et à x rationnel associe 1.
2.a. Proposer une repésentation graphique.
2.b. Rappeler la caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction.
2.c. Conclure.
3.a. Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x irrationel associe 0 et à x rationnel associe x.
3.b. Décrire f le plus simplement possible en termes de fonctions indicatrices.

`Exercice 9.` Dans le manuel *Odyssée* de Terminale S, on donne le cadre suivant avant de définir la limite d'une fonction réelle en un réel x_0 :

> On considère une fonction f définie sur un intervalle $]x_0 - h, x_0 + h[$, $h \in \mathbb{R}_+$ ...

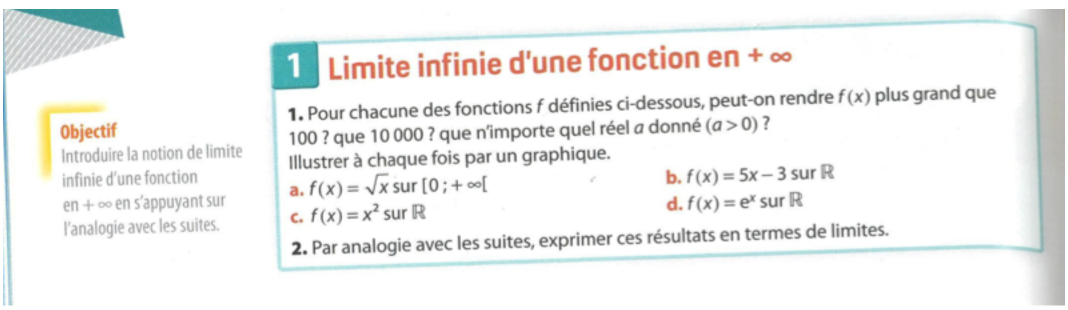
1. Ce cadre vous paraît-il suffisant pour les applications de la limite au lycée ? (*Indication :* On pourra par exemple se souvenir dans quel contexte la notion de limite est introduite en classe de Première S.)
2. Proposer un autre cadre.
3. Si une fonction réelle f est définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$, quel cadre est généralement donné dans le supérieur pour la définition de limite ?

`Exercice 10.` Dans un manuel de Terminale S, on donne la définition suivante de la limite d'une fonction réelle f en un réel x_0 :

> On dit que la limite de f en x_0 est égale au réel l lorsque tout intervalle de la forme $]l - k, l + k[$ contient tous les réels $f(x)$ dès que x est suffisament proche de x_0. On note...

1. Quelles ambiguïtés cette définition peut-elle soulever ?
2. Lever ces ambiguïtés .

`Exercice 11.` Dans le manuel *Mathx'x* de Terminale S, on propose l'activité d'introduction suivante de la notion de limite de fonction. Dans cette activité, quelle ambiguïté risque de mener à une mauvaise compréhension de cette notion ?


Objectif
Introduire la notion de limite infinie d'une fonction en $+\infty$ en s'appuyant sur l'analogie avec les suites.

1 Limite infinie d'une fonction en $+\infty$

1. Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, peut-on rendre $f(x)$ plus grand que 100 ? que 10 000 ? que n'importe quel réel a donné ($a > 0$) ? Illustrer à chaque fois par un graphique.
a. $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0 ; +\infty[$
b. $f(x) = 5x - 3$ sur $\mathbb{R}$
c. $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$
d. $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$
2. Par analogie avec les suites, exprimer ces résultats en termes de limites.

Continuité uniforme.

Exercice 12.
1. Montrer que toute fonction k-lipschitzienne est uniformément continue.
2. Montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et que sa dérivée est bornée sur I, alors f est uniformément continue.

Exercice 13. On se propose de déterminer parmi les fonctions suivantes lesquelles sont uniformément continues :

$$\begin{gathered} f \ : \ [0,1] \to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto x^2 \\ g \ : \ [0,+\infty[\to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto x^2 \\ h \ : \ ]0,1] \to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto \frac{1}{x} \\ s \ : \ [0,1] \to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto \sqrt{x} \\ t \ : \ [1,+\infty[\to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto \ln x \text{ et} \\ u \ : \ ]-\infty,+\infty[\to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto |x|. \end{gathered}$$

1. Traiter rapidement le cas des fonctions f et s, un utilisant un théorème du cours.
2. En utilisant les résultats de l'exercice 12, traiter le cas des fonctions t et u.
3. La fonction s est-elle k-lipschitzienne ? On pourra utiliser l'égalité des accroissements finis.
4. Ecrire une caractérisation des fonctions qui ne sont pas uniformément continues, à partir de la définition de la continuité uniforme.
5. En déduire que les fonctions h et g ne sont pas uniformément continues.
6. *Peut-être un peu plus dur.* Etudier la continuité uniforme de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}$. (L'écrire proprement !)

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f admet des limites l et l' en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

II Dérivabilité

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^4$, et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) < 0$ et $f(a) > 0$.
1. Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que f soit positive et strictement décroissante sur $]a-h, a+h[$.
2. Peut-on affaiblir les hypothèses sur f ?

Etude de fonctions.

Exercice 16. Déterminer le nombre de zéros dans $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^5 - x^3 + 1$.

Exercice 17.
1. Etudier les variations de la fonction réelle $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire les solutions de l'équation $a^b = b^a$ dans $\mathbb{N}^2$.
3. En s'inspirant de ce qui précède, proposer l'énoncé d'un exercice destiné à une classe de Terminale scientifique qui amène à résoudre l'équation $a^b = b^a$ dans $\mathbb{N}^2$. On dégagera les outils et savoir-faire en jeu.

Exercice 18.
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $Arctan(x) + Arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$. *Indication :* on peut essayer de montrer que la fonction associée est constante.
2. Etudier le cas où $x \in \mathbb{R}_-^*$.
3. Quelle hypothèse importante d'un théorème cet exercice permet-il de souligner ?

Exercice 19. Avec a et b deux réels, on définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$ si $x \leq 1$ et $f(x) = ax + b$ si $x > 1$.
1. Déterminer a et b tels que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier f (régularité, tableau de variation, limites, tracé...).

Exercice 20.
1. On propose l'étude guidée de la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{x}{1+e^{1/x}}$.
1.a. Montrer qu'il est possible de prolonger f par continuité en 0. On s'autorisera à noter également f ce prolongement.
1.b. Etudier la dérivabilité de f en 0. Préciser les demi-tangentes.
1.c. Etudier les variations de f.
1.d. Calculer les limites de f.
1.e. Etudier les asymptotes éventuelles de la courbe représentative de f, puis la position de la courbe par rapport à ces asymptotes.
1.f. Représenter f.

Etudier les fonction définies par les égalités suivantes. Cette fois, on les étudiera comme un(e) grand(e), en précisant les intervalles de définition quand nécesaire, la régularité, les variations, les limites, d'éventuelles asymptotes...et on soignera le tracé.
2. $g(x) = (x^2 - 1)\ln(1 + 1/x)$ et
3. $h(x) = \frac{(x-1)^2}{x} e^{1/x}$.

Dérivées successives.

Exercice 21. Calculer les dérivées successives des fonctions :
1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$,
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$, et
3. $h : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x-a}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Théorèmes des accroissements finis.

Exercice 22. *Inégalités à l'aide du TAF* Démontrer à l'aide de l'égalité des accroissements finis les inégalités suivantes :

1 $\forall x \in \mathbb{R}^+ ,\ e^x \geq 1 + x$
2 $\forall x \in \mathbb{R}^+ ,\ \sin(x) \leq x$ et
3 $\forall x \in \mathbb{R}^+ ,\ \frac{x}{1+x^2} \leq Arctan(x) \leq x$.

On rédigera très précisément (comme d'habitude!) en indiquant entre quels points on applique l'égalité des accroissements finis.

`Exercice 23.` *Inégalités à l'aide du théorème de Taylor-Lagrange.* Démontrer à l'aide du théorème deTaylor-Lagrange les inégalités :

$$\begin{array}{c} \mathbf{1}\ \ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]\ ,\ \cos(x) - 1 \leq \frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\ \text{ et} \\ \mathbf{2}\ \ \forall x \in \mathbb{R}^+\ ,\ (1+x)^{\frac{1}{4}} \geq 1 + \frac{x}{4} - \frac{3}{32}x^2. \end{array}$$

`Exercice 24.` On suppose la fonction exponentielle définie à partir d'une équation fonctionnelle ou différentielle, et que l'on connaît sa dérivée et sa régularité.
1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, appliquer le théorème de Taylor-Lagrange au rang n à $t \mapsto e^t$ entre 0 et x. Bien noter de quoi dépend l'élément introduit lors de l'utilisation du théorème de Taylor-Lagrange.
2. Montrer que e^x est la somme de la série $\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$.

`Exercice 25.`
1. On considère deux réels x_0 et b tels que $x_0 < b$, et f une fonction réelle définie et continue sur $[x_0, b[$, dérivable sur $]x_0, b[$, et telle que f' admette une limite l en x_0. Montrer que f est dérivable en x_0. On pourra utiliser l'égalité des accroissements finis.
2. *Petite variante.* On considère trois réels a, x_0 et b tels que $a < x_0 < b$. On note $I =]a, b[$. On suppose que f est une fonction réelle définie et continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$, et telle que f' admette une limite l en x_0. Montrer que f est dérivable en x_0.
3. *Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.* Aux hypothèses du point **2.** on ajoute f est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{x_0\}$. Montrer que f est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
4. *Application.* On considère la fonction g définie sur $[0,1]$ par $x \mapsto Arcsin(1-x^3)$. Etudier la continuité et la dérivabilité de g. On mettra en valeur les résultats obtenus à partir des théorèmes de composition, et ceux obtenus à partir du théorème démontré dans l'exercice.

`Exercice 26.` Déduire de l'égalité des accroissements finis la relation $e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$.

`Exercice 27.`
1. Déduire de l'égalité des accroissements finis un équivalent simple de $\ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(n)\big)$.
2. En déduire la divergence de la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$, et un équivalent de la suite des sommes partielles.

`Exercice 28.` Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin(x) + x$.
1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
2. La fonction f est-elle strictement croissante ? Enoncer précisément le théorème utilisé et le démontrer.
3. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes ?
4. Quels points l'étude de cette fonction permet-elle d'illustrer dans un cours ?

Quelques classiques pour manipuler.

Exercice 29. *Une fonction lisse à support compact.*

1 On considère l'application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-\frac{1}{x^2}}$ avec P_n une fraction rationelle à coefficients réels.

2 Montrer qu'il existe un prolongement par continuité de f à $\mathbb{R}^+$ et que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On notera également f ce prolongement. On pourra utiliser les résultats de l'exercice 24, qui sont d'ailleurs au programme !

3 Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et dont la restriction à $\mathbb{R}^+$ est f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4 En déduire l'existence d'une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, non nulle sur $I =]0,1[$ et nulle en dehors de I.

Exercice 30. *Polynômes d'Hermite.*

1. On considère un intervalle I ainsi que f et g des fonctions définies sur I à valeurs réelles. Montrer le théorème appelé formule de Leibniz : si f et g sont dérivables n fois sur I, alors fg l'est également et on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

2. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ avec H_n un polynôme à coefficients réels de degré n. Les polynômes H_n sont appelés polynômes d'Hermite.

3. Montrer que les polynômes H_n vérifient la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ H_{n+1}(X) = -H_n'(X) + XH_n(X)$.

4. Calculer H_0, H_1 et H_2.

5. Donner une relation très simple entre f et f'. En déduire, avec la formule de Leibniz l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_{n+1} - xH_n + nH_{n-1} = 0.$$

6. En déduire pour tout entier $n \geq 1$ les égalités

$$H_n' = nH_{n-1} \text{ et}$$
$$H_n'' - xH_n' + nH_n = 0.$$

7. *Théorème de Rolle généralisé.* On considère une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, et un réel a. Montrer que si $g(a) = 0$ et si g a une limite nulle en $+\infty$, alors g' s'annule sur l'intervalle $]a, +\infty[$. *Indication :* S'il existe $x_0 > a$ tel que $g(x_0) \neq 0$, on pourra montrer l'existence de b et d tels que $a < b < x_0 < d$ et $g(b) = g(d)$.

8. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ le polynôme H_n est scindé sur $\mathbb{R}$, que toutes ses racines sont simples et que pour tout entier $n \geq 2$ les racines de H_{n-1} séparent celles de H_n (i.e : qu'entre deux racines de H_n il existe une racine de H_{n-1} et une seule).

III Des questions à se poser...

Exercice 31. *Quizz*

On considère I un intervalle non réduit à un point, $a \in I$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. Pour chacune des propositions suivantes, préciser si elle est vraie (en la démontrant) ou fausse (en donnant un contre-exemple) :

a) Si f est continue sur I alors f est dérivable sur I.
b) Une fonction continue sur un intervalle borné y est uniformément continue.
c) Si f est positive et non majorée, elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
d) Si une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et si $f(0) = f(1)$, alors il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.
e) Si f est dérivable en un point $a \in I$, alors la restriction du graphe de la fonction à un voisinage de a est situé d'un côté de la tangente à la courbe en $\big(a, f(a)\big)$.
f) Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, $f(a) = 0$ et $f'(a) > 0$, alors il existe un voisinage de a sur lequel f est positive.
g) Soit $l \in \mathbb{R}$. La fonction f admet pour limite l en $+\infty$ si et seulement si la suite $f(n)$ tend vers $+\infty$.
h) Soit $l \in \mathbb{R}$. La fonction f admet pour limite l en $+\infty$ si et seulement si $f(x) \sim_{+\infty} l$.
i) Le produit de deux applications uniformément continues est uniformément continu.
j) Si f est dérivable et paire, alors f' est paire.
k) Si f est k-lipschitzienne sur I, elle est dérivable sur I.

IV Pour s'entrainer

`Exercice 32.` *Extraits de la première épreuve du Capes 2016.*
1. Dans cette question, on considère $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une fonction g définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
1.a. Question de cours. Enoncer le théorème de Rolle.
1.b. On suppose que g est n fois dérivable sur $[a, b]$ et s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de $[a, b]$. Montrer que la fonction dérivée n-ième $g^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a, b]$.
2. Dans cette question, on considère un intervalle I de $\mathbb{R}$, deux éléments a et b de I, un entier $n \geq 1$ et une fonction $f \in \mathcal{C}^n(I)$ à valeurs réelles.
2.a. Justifier l'existence de $M_n = \max_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)|$.
2.b. Démontrer que

$$\left| f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} \right| \leq M_n \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Cette inégalité est connue sous le nom d'inégalité de Taylor-Lagrange.
3. Dans cette question, on considère deux réels α et β, ainsi qu'une fonction $g \in \mathcal{C}^2([0,1])$ à valeurs réelles.
3.a. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}^4([0,1])$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [0,1]$ on ait $f''(x) = g(x)$ et telle que $f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta$.
3.b. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction f à un ordre et sur des intervalles biens choisis, montrer que pour tous nombres réels x et h tels que $0 \leq x-h \leq x+h \leq 1$ on a

$$\left| \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - f''(x) \right| \leq \frac{Mh^2}{12}.$$

`Exercice 33.` *Tiré de l'Examen Final de la session 2011.*

1. Déterminer l'ensemble D_f des réels x pour lesquels l'expression $f(x) = \frac{1}{x}\ln(\frac{e^x-1}{x})$ est bien définie. On définit ainsi une fonction sur D_f.
2. Donner un développement limité de f en 0 à l'ordre 2 et montrer que f se prolonge par continuité en 0.
3. Etudier la dérivabilité de f sur $D_f \cup \{0\}$.
4. Que peut-on déduire du développement limité de f en 0 à l'ordre 2 concernant la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en $\big(0, f(0)\big)$?
5. Etudier la limite de f en $+\infty$.
6. Montrer que $f(x) + f(-x)$ est constante pour $x \in D_f \cup \{0\}$: que peut-on en déduire concernant le graphe de f ?

`Exercice 33.` *Problème donné à l'Examen Final 2012 : Autour de l'égalité des accroissements finis* On considère $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Soit f une application continue et dérivable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle (égalité des accroissements finis entre a et $a + h$) que pour tout $h \in]0, b - a]$, on a l'existence d'un nombre réel que nous allons noter θ_h dans $]0, 1[$ tel que

$$f(a + h) = f(a) + h.f'(a + \theta_h.h) \tag{AF}$$

Le but du problème est d'étudier la limite éventuelle de θ_h lorsque h tend vers 0. *Il est indispensable que vous vous représentiez bien la fonction $h \mapsto \theta_h$. Les exemples sont là pour vous y aider.*

1. *Etude de quelques exemples*

1.1. Vous trouverez en annexe la représentation graphique d'une fonction f sur $[0, 1]$. On suppose que $a = 0$ et $b = 1$. Mettre en évidence sur le graphique le nombre $a + \theta_h.h$ (qui est ici unique pour h fixé) pour $h = 0,8$ et pour $h = 0,4$: vous ferez des constructions géométriques approximatives (tangentes) que vous rendrez avec votre copie. En déduire des valeurs approximatives de $\theta_{0,8}$ et $\theta_{0,4}$.

1.2. On suppose pour cette que question pour tout $h \in]0, b - a]$, on puisse prendre $\theta_h = 0$ (la fonction $h \mapsto \theta_h$ peut être choisie constamment nulle). Quelle est alors la nature de la fonction f ? La fonction $h \mapsto \theta_h$ qui vérifie (AF) est-elle unique ?

1.3. On suppose pour cette question que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = x^2$. Déterminer par le calcul la fonction $h \mapsto \theta_h$ (qui est alors unique). *Indication :* il suffit de bien utiliser (AF).

1.4. On suppose pour cette série de questions que pour tout $h \in]0, b-a]$, on puisse prendre $\theta_h = 1$.

1.4.1. Montrer que pour tout $x \in]a, b]$ on a

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(x).$$

1.4.2. En déduire que f est deux fois dérivable sur $]a, b]$ et que pour tout $x \in]a, b]$, $f''(x) = 0$. Quelle est la nature de f ?

1.5. On suppose pour cette question que $a = 0$ (b quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$) et que pour tout $x \in [0, b]$, $f(x) = e^x$. Déterminer une expression de la fonction $h \mapsto \theta_h$ (qui est alors unique). En déduire, $\lim\limits_{h\to 0} \theta_h$.

2. *tude du cas où $f''(a) \neq 0$.* On suppose que f est deux fois dérivable en a et que $f''(a) \neq 0$. (La question **2.3.** est indépendante).

2.1. Mettre en évidence une fonction $h \mapsto \hat{\varepsilon}(h)$ de limite nulle en 0 telle que pour tout $h \in]0, b-a]$,

$$f'(a + \theta_h.h) = f'(a) + \theta_h.h.f''(a) + h.\hat{\varepsilon}(h).$$

2.2. En utilisant la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour f dans le membre de gauche de (AF), en déduire que $\lim_{h \to 0} \theta_h = \dfrac{1}{2}$.

2.3. Montrer que si l'on suppose de plus que f est deux fois dérivable avec f'' continue, alors il existe un intervalle contenant a sur lequel f' est injective. En déduire que pour tout h suffisamment petit, le réel θ_h satisfaisant (AF) est unique.

3. On suppose maintenant que f est n fois dérivable en a avec $n > 2$, que $f^{(n)}(a) \neq 0$ et que pour tout $k \in \{2, \ldots n-1\}$, $f^{(k)}(a) = 0$.
En vous inspirant de la question précédente (sans mettre forcément autant de détail), montrez que lorsque h tend vers 0, θ_h admet une limite que vous déterminerez.

Annexe à rendre avec la copie
pour l'exercice 29