Feuille 6 : Intégration sur un intervalle compact.

M1 EEF second degré Mathématiques - Analyse

Certains exercices sont tirés ou inspirés des documents d'Yves Ropars, des livres d'Arnaudiès-Fraysse et de Moisan.

I Quelques propriétés de l'intégrale .

`Exercice 1.` *Définitions de l'intégrale - Théorème fondamental de l'analyse.*
1. Donner la ou les définition(s) de l'intégrale donnée(s) dans les classes de Terminale S.
2. Dans quel cas l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est-elle définie de deux façons différentes dans le programme de Terminale S ? Que convient-il alors de faire lors du cours ?
3. Pour la classe de TS, le programme demande de définir pour une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ comme la différence $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a,b]$. Quel(s) résultat(s) faut-il établir pour que cette définition soit bien posée ?
4. Avec la définition de l'intégrale d'une fonction continue positive donnée en Terminale S démontrer le théorème fondamental de l'analyse en restant dans le cadre du programme de Terminale S.
5. Les futurs programmes de Terminale abordent-ils la notion d'intégrale par le même cheminement ?
6. Donner une définition de l'intégrale au programme de la classe de Mathématiques supérieures.

Sommes de Riemann.

`Exercice 2.` En reconnaissant des sommes de Riemann, étudier les limites des suites réelles de terme général :

1. $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k}{n}\right)$,
2. $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$,
3. $w_n = \sum_{k=1}^{(p-1)n} \frac{1}{n+k}$ et
4. $x_n = \cosh\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cosh\frac{1}{\sqrt{n+2}} + ... + \cosh\frac{1}{\sqrt{2n}} - n$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz et normes.

`Exercice 3.` Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On considère f et g deux applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

1. En considérant le discriminant du polynôme du second degré en λ : $P(\lambda) = \int_a^b (f+\lambda g)^2$, démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz[1]

$$|\int_a^b fg| \leq \Big(\int_a^b f^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_a^b g^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Montrer qu'en cas d'égalité, f et g sont proportionnelles.
3. Soit h une fonction continue sur $[0,1]$ et strictement positive. Montrer l'inégalité

$$\Big(\int_0^1 h\Big)\Big(\int_0^1 \frac{1}{h}\Big) \geq 1$$

et étudier le cas d'égalité.
4. Déduire de l'inégalité de Cauchy-Scharz l'inégalité suivante.

$$\int_a^b |f| \ \leq \sqrt{b-a}\ \Big(\int_a^b f^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Peut-on l'interpréter en termes de normes ?

5. Démontrer l'inégalité suivante puis la traduire en termes de comparaison de normes :

$$\Big(\int_a^b f^2\Big)^{\frac{1}{2}} \ \leq \sqrt{b-a}\ .\ sup_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

6. *Plus dur !* Deux des trois normes évoquées sont-elles équivalentes ?

Théorèmes de la moyenne.

`Exercice 4.` *(In)égalité de la moyenne : c'est du cours !* Soit f et g deux applications continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose g positive.
1. Montrer que si m et M sont respectivement les bornes inférieures et supérieures de f sur $[a,b]$ on a l'inégalité :

$$m\int_a^b g \ \leq \ \int_a^b fg \ \leq \ M\int_a^b g.$$

2. Montrer que si f est continue sur $[a,b]$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b fg \ = \ f(c)\int_a^b g.$$

3. Montrer que si m et M sont respectivement les bornes inférieures et supérieures de f sur $[a,b]$ on a l'inégalité :

$$m(b-a) \ \leq \ \int_a^b f \ \leq \ M(b-a).$$

4. Montrer que si f est continue sur $[a,b]$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f \ = \ (b-a)f(c).$$

[1] Hermann Schwarz naît en Allemagne en 1843. Il laisse son nom à la célèbre inégalité et à l'égalité des dérivées secondes croisées. On ne le confondra pas avec Laurent Schwar**t**z, mathématicien français qui reçoit la médaille Fields en 1950, mais dont vous ne devriez pas avoir à écrire le nom cette année. Sa contribution la plus célèbre est la théorie des distributions qui étend la notion de fonction et qui est utilisée en physique par exemple.

5. Déduire de ce qui précède une preuve du théorème fondamental de l'analyse.

`Exercice 5.` *Deuxième formule de la moyenne.* Soit $f \in \mathcal{C}^1\big([a,b]\big)$, positive et décroissante et $g \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$. On souhaite montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b fg \;=\; f(a)\int_a^c g.$$

1. On note G la primitive de g sur $[a,b]$ qui s'annule en a. Montrer que G admet sur $[a,b]$ une bone inférieure et une borne supérieure. On les note respectivement m et M.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que $mf(a) \leq \int_a^b fg \leq Mf(a)$.
3. Conclure.
4. *Application aux séries.* Trouver un équivalent de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x^3+1}dx$. Etudier la convergence de la série $\sum\ u_n$, et donner un équivalent de la suite des restes ou des sommes partielles.

5. *Application aux intégrales impropres.* Montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ est convergente. Comme il s'agit de montrer que la fonction $F\ :\ X \mapsto \int_1^X \frac{\sin(x)}{x}dx$ admet une limite, on pourra lui appliquer le critère de Cauchy pour les fonctions.

II Calculs d'intégrales.

`Exercice 6.` *Primitives de fractions rationnelles.* Déterminer l'ensemble des primitives [2] des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto \frac{4}{5+x}$ (à quoi faut-il prendre garde ?)
2) $x \mapsto \frac{1}{1+25x^2}$ (on essaie de se ramener à une fonction dont on connaît une primitive célèbre)
3) $x \mapsto \frac{1}{16+25x^2}dx$ (on essaie de se ramener à ce qui précède)
4) $x \mapsto \frac{2x+3}{16+25x^2}$ (on peut commencer par s'occuper des x au numérateur)
5) $x \mapsto \frac{x^3-10x^2+33x-38}{x^2-6x+8}$ (on peut utiliser une division euclidienne et une décomposition en éléments simples)
6) $x \mapsto \frac{3x-7}{3x^2-12x+12}$ (on commencera par factoriser le dénominateur)
7) $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ (si on la regarde bien dans les yeux, il n'y a presque rien à faire !)
8) $x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^2}$ (on peut essayer de faire apparaître $1+x^2$ au numérateur...)
9) Proposer une méthode pour calculer des primitives I_n et J_n des fonctions $x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^n}$ et $x \mapsto \int \frac{x}{(x^2+1)^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

`Exercice 7.` *Primitives de fractions rationnelles en certaines fonctions usuelles.* Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes. On précisera à chaque fois un intervalle.

1) $x \mapsto \tan(x)$ **2)** $x \mapsto \sin^2(x)$ **3)** $x \mapsto \cos^4(x)$ et **4)** $\int \sqrt{1-e^{-2x}}dx$

`Exercice 8.` Calculer les intégrales suivantes.

[2] Quelles précautions faut-il prendre en annonçant une primitive d'une fonction ?

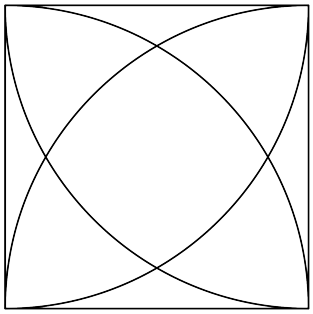


Figure 1: Figure exercice 9.

1) $\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}dx$ **2)** $\int_1^2 \ln(x)dx$ **3)** $\int_1^2 \frac{arctan(x)}{x^2}dx$

4) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x)dx$ **5)** $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(x)}{1-2\sin(x)}dx$ **6)** $\int_{-2}^2 (x^3+x^2)\cos(x)dx$

7) $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}dx$ (on peut calculer d'au moins deux façons : quel est le graphe de l'intégrande ?)

8) $\int_{-1}^1 \frac{arcsin(x)}{2e^{|x|}-\cos(x)}dx$ (à faire sans aucun calcul !)

9) $\int_0^1 \frac{dt}{t+i}$ (quelle est la définition de l'intégrale d'une fonction complexe ?)

`Exercice 9.` Calculer l'aire de l'intersection des disques de rayon 1 centrés en les sommets d'un carré de côté 1 de plusieurs façons :

1. en se ramenant à un système linéaire, [3]
2. à l'aide d'un calcul d'intégrale,
3. ou *(plus dur)* par un calcul direct !

III Quelques classiques.

`Exercice 10.` *Un exercice très formateur...donné ainsi au Capes 2012* . On considère $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et une fonction f continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que si $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors la fonction f est nulle sur $[a,b]$.

Lemme de Riemann-Lebesgue.

[3] Je remercie très vivement M.Brusco qui m'a communiqué (entre autre) cet exercice. Parfois donné parfois en classe de Première S, l'exercice permettait de faire travailler les systèmes linéaires : on demande de calculer les aires des trois types de surface.

`Exercice 11.` *Lemme de Riemann-Lebesgue.* Soit f une fonction à valeurs réelles et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$. Pour tout λ réel on pose $I_\lambda(f) = \int_a^b f(x)e^{\lambda x i}dx$. Montrer l'existence d'un réel $C > 0$ tel que $\forall \lambda > 0,\ |I_\lambda(f)| \leq \frac{C}{\lambda}$ et en déduire la limite de $I_\lambda(f)$ quand λ tend vers $+\infty$. On pourra utiliser une intégration par parties.

`Exercice 12.` *Application du lemme de Lebesgue*

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_0^\pi\ t(\pi - t)\cos(2nt)dt$.

2. En déduire que pour $N \geq 1$ on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \ = \ \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \phi(t)\sin\big((2N+1)t\big)dt$$

où ϕ est une application continue de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$.

3. En utilisant le lemme de Lebesgue calculer la somme[4] de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.

4. En déduire la somme de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$.

5. Montrer que l'intégrale $I \ = \ \int_0^1 \frac{t\ln(t)}{t-1}dt$ est définie.

6. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{t-1}dt \ + \ \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 t^n \ln(t)dt \ \longrightarrow_{N\infty} \ 0.$$

7. En déduire la valeur de I.

Fonctions aux bornes de l'intégrale.

`Exercice 13.` [5]

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$, et α et β deux fonctions dérivables sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $[a,b]$. Montrer que la fonction G définie sur J par

$$G(x) \ = \ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$$

est dérivable sur J et que

$$G'(x) \ = \ f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)\ .$$

2. Etudier la régularité de la fonction définie par $H(x) = \int_{\sqrt{1+x^2}}^{x^2} e^{\sin(t)}dt$.

3. Déterminer l'ensemble de définition de F définie par

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$$

4. Etudier les variations de F.

[4] Cette somme se retrouve rapidement en développant en série de Fourier une fonction bien choisie...mais on se gardera bien de dire (en particulier à un jury!) que la théorie des séries de Fourier a pour objectif le calcul des sommes $\sum \frac{1}{n^{2k}}$.

[5] Vous connaissez déjà cette façon de définir une fonction à l'aide d'une intégrale rendue célèbre par exemple par la fonction ln. D'une façon générale, si on considère une fonction $G\ :\ x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t,x)dt$ le problème se pose de savoir quelles propriétés (continuité, dérivabilité...) de f, α et β hérite G.

IV Intégration numérique.

Dans ce chapitre on considère une fonction $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et on propose des méthodes numériques pour donner une approximation I de $\int_a^b f(x)dx$. En particulier, on essaie de majorer en valeur absolue l'erreur commise $\epsilon = \int_a^b f(x)dx - I$.

`Exercice 14.` Au fait, pourquoi chercher des méthodes d'intégration numérique ?

`Exercice 15.` *Degré d'approximation des sommes de Riemann. Méthode des rectangles à gauche.* On considère $f \in \mathcal{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On sait que la suite des sommes de Riemann $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\big(\frac{k}{n}\big)$ converge vers $\int_0^1 f(x)dx$. On se pose alors la question de la vitesse de convergence.

1. On note F une primitive de f sur $[0,1]$. Soit k et n des entiers tels que $0 \leq k < n$. Prouver qu'il existe un réel $c_{k,n} \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ tel que :

$$F\big(\frac{k+1}{n}\big) - F\big(\frac{k}{n}\big) \;=\; \frac{1}{n} f\big(\frac{k}{n}\big) + \frac{1}{2n^2} f'(c_{n,k})$$

2. Calculer la limite de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'(c_{n,k})$.

3. En déduire l'existence d'un réel A tel que

$$\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\big(\frac{k}{n}\big) \;=\; \frac{A}{n} \;+ o\big(\frac{1}{n}\big).$$

4. En s'inspirant de ce qui précède, démontrer que si $f \in \mathcal{C}^2\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ il existe un réel B tel que

$$\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\big(\frac{k}{n}\big) \;- \frac{1}{2n}\big(f(1) - f(0)\big) = \;\frac{B}{n^2} \;+ o\big(\frac{1}{n^2}\big).$$

`Exercice 16.` *Méthode des rectangles au point milieu.* On décide d'approcher f sur $[a,b]$ par la fonction constante égale à $f(c)$ où $c = \frac{a+b}{2}$.

1. Faire une figure dans le cas où f est positive.

2. En utilisant cette approximation de la fonction f, donner une approximation I de $\int_a^b f(x)dx$.

3. Pour évaluer l'erreur $\epsilon = \int_a^b f(x)dx - I$ on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, et on note M la borne supérieure de $|f''|$ sur cet intervalle. On note également $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Appliquer l'égalité de Taylor avec reste-intégral à F entre a et c d'une part, entre b et c d'autre part.

4. En déduire que

$$\epsilon \;=\; \int_c^b \frac{(b-t)^2}{2} f''(t)dt - \int_c^a \frac{(a-t)^2}{2} f''(t)dt\ .$$

5. Montrer que

$$|\epsilon| \;\leq \frac{(b-a)^3}{24} M.$$

6. Pour tout $n \geq 1$ on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles on approche l'intégrale de la fonction f à l'aide de la méthode décrite ci-dessus. Faire une figure et en déduire une approximation I_n de $\int_a^b f(t)dt$.

7. En déduire l'encadrement de l'erreur $\epsilon_n = I_n - \int_a^b f(t)dt$ suivant

$$|\epsilon_n| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2}M.$$

8. *Application numérique.* Proposer une valeur approchée à 10^{-4} près de $\int_0^2 e^{-x^2}dx$.

`Exercice 17.` *Méthode des trapèzes.*

1. Donner l'expression de la fonction affine ϕ interpolant f en a et en b. Faire une figure.

2. En utilisant cette approximation de la fonction f, donner une approximation I de $\int_a^b f(x)dx$.

3. Pour évaluer l'erreur $\epsilon = \int_a^b f(x)dx - I$ on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, et on note M la borne supérieure de $|f''|$ sur cet intervalle. Montrer que

$$\int_a^b (t-a)(t-b)f''(t)dt = (a-b)\big(f(b)+f(a)\big) + 2\int_a^b f(t)dt$$

4. En déduire que

$$|\epsilon| \leq \frac{(b-a)^3}{12}M.$$

6. Pour tout $n \geq 1$ on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles on approche l'intégrale de la fonction f à l'aide de la méthode décrite ci-dessus. Faire une figure et en déduire une approximation I_n de $\int_a^b f(t)dt$.

7. En déduire l'encadrement de l'erreur $\epsilon_n = I_n - \int_a^b f(t)dt$ suivant

$$|\epsilon_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}M.$$

V Des questions à se poser...

`Exercice 18.` *Quizz*

Pour chacune des propositions suivantes, préciser si elle est vraie (en la démontrant) ou fausse (en donnant un contre-exemple) :

a) Si f et g sont continues telles que $f \leq g$ alors pour tout $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ on a l'inégalité $\int_c^d f(x)dx \leq \int_c^d g(x)dx$.

b) On suppose f continue par morceaux et positive sur un intervalle $[a, b]$. Si $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors $f = 0$.

c) "$\ln(x)$ est une primitive de $\frac{1}{x}$".

d) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. On a $\big(\int_1^{2x} f(t)dt\big)'(x) = f(2x)$.

e) On a l'égalité $\int_0^1 \frac{e^{-tx}dx}{(1+t^2x^2)} = e^{-t}(x+1)$.

f) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la fonction $t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de la fonction $t \mapsto t^n$.

g) La primitive d'une fonction rationnelle est une fonction rationnelle.

h) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\int_{-x}^x f(t)dt = 0$, alors f est impaire.

j) Si f est bornée sur I, alors toute primitive de f sur I est bornée.

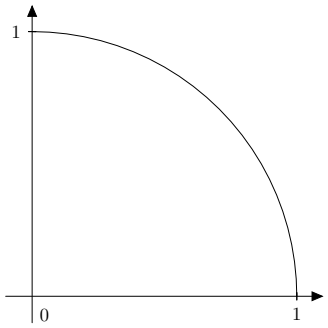
VI Epreuve 2 du Capes 2017

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On considère le quart de cercle unité du plan usuel, représenté sur la figure ci-dessous :



I. Quelle est l'aire $\mathcal{A}$ du quart de disque $\mathcal{D}$ délimité par les deux axes de coordonnées et ce quart de cercle ?

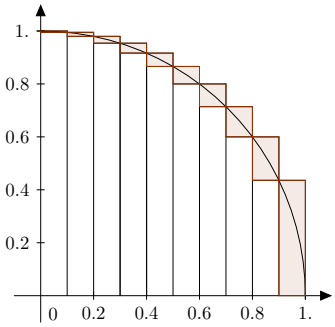
II. Montrer que cette aire est également la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x.$$

Par la suite, on considère la fonction

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{1-x^2}. \end{array} \right.$$

III. On s'intéresse tout d'abord à une évaluation de $\mathcal{A}$ grâce à la *méthode des rectangles*.



1

On fixe un entier naturel $n \geqslant 2$. On introduit une subdivision

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$$

à pas constant de l'intervalle $[0, 1]$, c'est-à-dire que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ x_i = \frac{i}{n}.$$

Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on considère les points $A_i(x_i, \phi(x_i))$ et, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, on construit sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ le rectangle *au-dessous de la courbe* de sommets

$$(x_i, 0), \qquad (x_{i+1}, 0), \qquad (x_{i+1}, \phi(x_{i+1})), \qquad (x_i, \phi(x_{i+1}))$$

et le rectangle *au-dessus de la courbe* de sommets

$$(x_i, 0), \qquad (x_{i+1}, 0), \qquad (x_{i+1}, \phi(x_i)), \qquad (x_i, \phi(x_i)).$$

On a représenté ces rectangles pour $n = 10$ sur la figure ci-dessus. La différence ensembliste de ces rectangles a été grisée.
On note $\check{s}(n)$ la somme des aires des rectangles au-dessous la courbe et $\hat{s}(n)$ la somme des aires des rectangles au-dessus de la courbe.

1. Un élève de terminale scientifique affirme à propos de cette méthode : « Plus le nombre de rectangles augmente, plus les sommets des rectangles se rapprochent de la courbe, donc la somme des aires des rectangles tend vers $\mathcal{A}$ ». Que répondez-vous à cet élève ?

2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\check{s}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) \leqslant \mathcal{A} \leqslant \hat{s}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \phi(x_i).$$

3. Montrer que la somme des aires des rectangles grisés sur la figure précédente est

$$\hat{s}(n) - \check{s}(n) = \frac{1}{n}.$$

4. Déterminer un entier N tel que, pour $n \geqslant N$, on ait $|\mathcal{A} - \hat{s}(n)| \leqslant 10^{-3}$.

5. Représenter sur une même figure $\hat{s}(2)$, $\check{s}(2)$, $\hat{s}(4)$ et $\check{s}(4)$. Comparer $\hat{s}(2)$ et $\hat{s}(4)$, puis $\check{s}(2)$ et $\check{s}(4)$.

6. Montrer que les suites de terme général $\hat{s}(2^n)$ et $\check{s}(2^n)$ sont adjacentes.

7. En quoi ce résultat peut-il vous aider à répondre à l'élève de la question 1 ?

8. Écrire un algorithme de calcul de $\hat{s}(n)$.

IV. On s'intéresse ici à une évaluation de $\mathcal{A}$ grâce à la méthode dite *méthode des trapèzes*. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note

$$s(n) = \frac{\hat{s}(n) + \check{s}(n)}{2}.$$

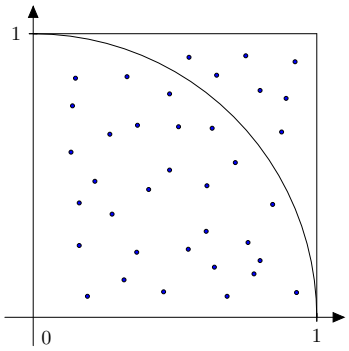
1. Justifier le nom de *méthode des trapèzes*. On représentera $s(4)$ sur une figure.

2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $\check{s}(n) \leqslant s(n) \leqslant \hat{s}(n)$.

3. Indiquer laquelle des trois valeurs $\hat{s}(n)$, $\check{s}(n)$ ou $s(n)$ est la meilleure approximation de $\mathcal{A}$.

2

V. On s'intéresse maintenant à une autre méthode, appelée *méthode de Monte-Carlo*. Il s'agit de tirer aléatoirement un point du carré unité de façon uniforme et de calculer la fréquence des points qui sont dans le quart de disque $\mathcal{D}$.



On admet que la probabilité qu'un point tiré de cette manière soit dans le quart de disque est égale à $\mathcal{A}$.

1. Soit $M(x, y)$ un point du carré $[0, 1]^2$. Montrer que ce point est dans le quart de disque dont on cherche à mesurer l'aire si, et seulement si, $x^2 + y^2 \leqslant 1$.
2. On dispose de la fonction (sans argument) **alea**, qui renvoie à chaque appel un nombre réel tiré au hasard uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$. Écrire un algorithme qui simule un tirage aléatoire de N points du carré unité et calcule la fréquence f des points figurant dans le quart de disque $\mathcal{D}$.
3. f étant la fréquence obtenue lors d'un tirage aléatoire de N points du carré unité, déterminer un intervalle de confiance de $\mathcal{A}$ au niveau de confiance 95 %.
4. En déduire le nombre N de tirages à effectuer pour obtenir, au niveau de confiance 95 %, une estimation de $\mathcal{A}$ avec une précision égale à 10^{-3}.
5. Comparer ce résultat avec celui de la question **III.4.**