Simulation d'expériences aléatoires avec Scratch.

M1 Enseignement Mathématiques - Probabilités et Statistiques

L'objectif de cette deuxième séance est de s'entrainer à écrire des algorithmes simulant des expériences aléatoires, et à les traduire en programmes à l'aide de Scratch. Dans un premier temps on ne s'intéressera pas aux justifications théoriques : on gardera les questions marquées d'un ♣ pour plus tard.

`Exercice 1.` *Problème du grand Duc de Toscane.*

> Le grand Duc de Toscane avait observé que bien qu'admettant le même nombre de décompositions possibles en somme de 3 entiers compris entre 1 et 6, le nombre 10 apparaissait plus fréquemment que le nombre 9 lors de nombreux lancers de 3 dés.

1. Ecrire un algorithme simulant un lancer de trois dés, et affichant un premier message si la somme des trois dés vaut *9*, et un deuxième message si la somme des trois dés vaut *10*.
2. Ecrire un algorithme prenant en entrée un entier n, simulant n lancers de trois dés, puis affichant combien de fois les résultats *9* et *10* ont été respectivement obtenus. Pouvez-vous confirmer les observations du Duc ?
♣. Apporter une justification.

`Exercice 2.` *Un jeu de dés du pays de Galles.*
Pascal et Tania jouent au jeu suivant. Pascal lance trois dés : son score est la somme des deux plus grands chiffres obtenus sur les trois dés, à laquelle on soustrait la plus petit chiffre apparaissant sur les trois dés (par exemple, si les trois dés indiquent 5, 2, et 4, le score de Pascal est $5 + 4 - 2 = 7$.

A son tour, Tania lance trois dés. Elle range les résultats par ordre croissant, et son score est le résultat du dé du milieu. Par exemple, si les trois dés lancés par Tania indiquent 5, 2, et 4, le score de Tania est 4.

Le gagnant est celui dont le score est le plus élevé.

1. Ecrire un programme tirant aléatoirement trois entiers a, b et c entre 1 et 6, puis les rangeant par ordre croissant dans trois variables.
2. Ecrire un programme simulant le jeu décrit ci-dessus : le programme donnera pour chacun des joueurs les chifres indiqués par les trois dés, le résultat de chaque joueur et le gagnant.
3. En répétant cette expérience un grand nombre de fois, donner une estimation de l'espérance du résultat de chacun des joueurs.
4. En répétant cette expérience un grand nombre de fois donner une estimation de la probabilité de gagner de chacun.

`Exercice 3.` *Encore une estimation de probabilité à l'aide d'une simulation d'expérience aléatoire.*
On considère une variable alátoire X suivant une loi uniforme continue sur l'intervalle $[0, 2]$. On voudrait estimer la probabilité de l'évènement $X^2 \geq X + 1$.

1. En tirant au hasard avec Scratch un grand nombre d'éléments entre 0 et 2, donner une estimation de la probabilité recherchée.
♣. Quelle est la valeur exacte ?

`Exercice 4.` *Marche aléatoire sur un ensemble fini* On considère la marche aléatoire associée à un surf aléatoire simplifié, qui est décrite à la page 168 du manuel *Math'x* (ces pages sont reproduites plus loin).
1. Ecrire un programme simulant 100 pas d'une telle marche aléatoire.
2. En répétant un grand nombre de fois l'expérience précédente, conjecturer le comportement des probabilités que le surfeur se trouve sur les différentes pages.
♣. Résoudre l'exercice du manuel.

`Exercice 5.` *Le jeu du corbeau.*
Le petit Oscar joue à un jeu de société. Au début d'une partie, quatre paniers de fruits contiennent chacun quatre fruits : quatre poires, quatre pommes vertes, quatre pommes rouges ou encore quatre prunes. Un corbeau cherche à entrer dans le verger pour manger les fruits : il est situé sur une piste, à cinq cases de l'entrée du verger.

A chaque tour, on lance un dé dont les six faces peuvent indiquer : une poire, une pomme verte, une pomme rouge, une prune, un panier ou un corbeau. Si un lancer de dé indique l'un des fruits, et s'il reste en jeu un de ces fruits, on en retire un du panier correspondant. Par exemple, si le dé marque pomme rouge, et s'il reste deux pommes rouges, on retire une pomme rouge. Mais si le dé marque pomme rouge alors qu'il n'en reste plus, il ne se passe rien. Si le dé marque panier, on retire un fruit au choix sur le plateau. Si le dé marque corbeau, le corbeau avance d'une case vers le verger. La partie est gagnée si tous les fruits sont retirés avant que le corbeau ne rentre dans le verger ; la partie est perdue si le corbeau avance cinq fois (c'est-à-dire si le dé est tombé cinq fois sur le corbeau) avant qu'on ait retiré tous les fruits.
1. Simuler une partie sans tenir compte de la face panier (si le dé tombe sur panier, on fera comme s'il ne se passait rien).
2. Cette fois, quand on tombe sur la case panier, on choisit un fruit dans un des paniers en contenant le plus. Simuler une telle partie.
3. Cette fois, quand on tombe sur la case panier, on choisit un fruit au hasard parmi les fruits qui restent.

4. En simulant un grand nombre de parties, donner une estimation de la probabilité de gagner dans chacun des cas.

`Exercice 6.` *Le problème du collectionneur de coupons (ou de vignettes).*
On considère le problème du collectionneur tiré du manuel *Math'x* (page 140), présent dans ces feuilles, et plus particulièrement la question (soulevée dans la partie **B**) du nombre moyen de boîtes nécessaires pour compléter la collection.
1. Ecrire puis implémenter un programme simulant un grand nombre de successions d'achats s'arrêtant lorsque la collection est complétée. D'après ces simulations, quel est le nombre moyen de boîtes à acheter ?
♣. Répondre aux questions de la partie **B**. Peut-on généraliser au cas d'une collection de n objets distincts ?

`Exercice 7.` *Le jeu du Franc Carreau.* Le jeu du *Franc Carreau* est décrit de la façon suivante dans le document d'accompagnement des programmes de collège concernant les probabilités :

> Le jeu de *Franc Carreau* consiste à prendre une pièce de monnaie (de 1cm de rayon, par exemple), et à la lancer sur un carrelage dont les carreaux sont des carrés (de 10cm de côté par exemple). On fait *Franc Carreau* quand la pièce tombe sur une seule case, dont elle peut toucher les bords, mais sans empiéter sur une autre case. Dans ce cas, on gagne un euro ; sinon, on perd un euro.

1. Simuler un grand nombre de parties, et en déduire une valeur approchée de l'espérance du jeu décrit, et de la probabilité de l'évènement : la pièce tombe sur une seule case (les deux mesures donnés pourront être passées en entrée).
♣. Justifier.

`Exercice 8.` *Programme de Seconde.* On souhaite illustrer les points suivants tirés du projet de programme de Seconde.

> ***Expérimentations***
> - Lire et comprendre une fonction Python renvoyant le nombre ou la fréquence de succès dans un échantillon de taille n pour une expérience aléatoire à deux issues.
> - Simuler la loi des grands nombres sur Python ou tableur.
> - Simuler N échantillons de taille n d'une expérience aléatoire à deux issues. Si p est la probabilité d'une issue et f sa fréquence, observer la proportion des cas où l'intervalle $[f-\frac{1}{\sqrt{n}}, f+\frac{1}{\sqrt{n}}]$ contient p.

1. Ecrire une fonction en *Python* ou en *Scratch* qui corresponde au premier tiret.
2. Illustrer le troisième tiret.

4 Collection de figurines d'une équipe de football

OBJECTIF Étudier un processus évolutif à l'aide de matrices de transitions et d'une loi géométrique.

Problème étudié

Une marque de céréales propose à ses clients de constituer une collection de figurines de l'équipe nationale de football. La collection complète se compose de 11 figurines, chacune à l'effigie d'un joueur de l'équipe. Ces figurines, éditées en grand nombre, ont été réparties au hasard dans la production, à raison d'une seule par boîte de céréales. On suppose l'équiprobabilité des figurines et l'indépendance des contenus des boîtes. Max, passionné de foot et friand de céréales rêve de réunir la collection des 11 figurines de l'équipe.
Comment va évoluer sa collection au fur et à mesure de ses achats de céréales ?
Quel nombre moyen de boîtes doit-il acheter pour espérer se constituer une collection complète ?

On pourra réaliser une simulation pour estimer le nombre moyen de boîtes à acheter pour avoir une collection complète : voir exercice 9 page 142.

A Évolution de la collection pour n achats

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de figurines différentes obtenues par Max après n achats d'une boite de céréales. On a donc $P(X_0 = 0) = 1$.

1. a. Préciser quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire X_n, lorsque $1 \leqslant n \leqslant 10$, puis lorsque $n \geqslant 11$.
b. Déterminer $P(X_1 = 1)$, $P_{(X_1=1)}(X_2 = 1)$, $P_{(X_1=1)}(X_2 = 2)$. En déduire $P(X_3 = 2)$, à l'aide d'un arbre pondéré.
c. Que vaut $P_{(X_n=11)}(X_{n+1} = 11)$, pour $n \geqslant 11$?

2. a. Écrire la matrice M de transition de ce graphe : $M = (m_{ij})$ où $m_{ij} = P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 11$, $1 \leqslant j \leqslant 11$. En citer quelques particularités.
b. À l'aide d'un logiciel, calculer M^2, M^3, M^{20}, M^{50} et M^{100}. *On affichera les valeurs exactes ou arrondies à 10^{-3} près.* Quelles observations peut-on faire ?
c. Donner le coefficient situé en 1re ligne et 2e colonne de la matrice M^2. Interpréter ce nombre. Comment peut-on retrouver $P(X_3 = 2)$?

3. Sachant que Max possède actuellement 4 figurines distinctes :
a. Quelle est la probabilité qu'il en possède 9 distinctes, après avoir acheté 20 boites de céréales supplémentaires ?
b. Quelle est la probabilité qu'il ait la collection complète après avoir acheté 50 boîtes supplémentaires ?

B Le nombre moyen de boîtes à acheter

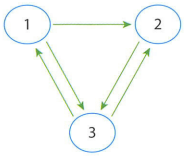
Pour $k \in \{0 ; 1 ; \ldots ; 10\}$, on note Y_k la variable aléatoire correspondant au nombre de boites qu'il faut acheter pour passer de l'état k (posséder pour la première fois k figurines distinctes) à l'état $k + 1$ (posséder pour la première fois $k + 1$ figurines distinctes).

1. Loi de Y_k et espérance
a. Préciser quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire Y_k. Vérifier que $P(Y_0 = 1) = 1$.
b. On suppose que $k \geqslant 1$.
Calculer $P(Y_k = 1)$ et montrer que, pour tout entier j, $j \geqslant 1$, $P(Y_k = j) = \left(\frac{k}{11}\right)^{j-1}\left(\frac{11-k}{11}\right)$.

2. a. Soit $Y = \sum_{k=0}^{k=10} Y_k$. Justifier que Y compte le nombre n d'achats nécessaires pour obtenir $X_n = 11$.
b. On admet que l'espérance de Y_k, donnée par $E(Y_k) = \lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{j=1}^{N} j\,P(Y_k = j)$, est égale à $E(Y_k) = \frac{11}{11-k}$ et que par linéarité de l'espérance : $E\left(\sum_{k=0}^{k=10} Y_k\right) = \sum_{k=0}^{k=10} E(Y_k)$. Calculer $E(Y)$ et en déduire combien on doit, en moyenne, acheter de boites de céréales pour se constituer une collection complète.

Exercices guidés

Objectif BAC — Étude asymptotique d'une marche aléatoire



Énoncé Un mini réseau internet comprend trois pages web : 1, 2 et 3. Les liens sont indiqués dans le graphe ci-contre. Un surfeur aléatoire surfe indéfiniment sur ce réseau. À chaque clic il choisit de façon équiprobable un des liens présents sur la page.
Après n clics, on note X_n la variable aléatoire donnant la page sur laquelle se trouve le surfeur et P_n la matrice ligne $(P(X_n = 1)\ \ P(X_n = 2)\ \ P(X_n = 3))$.

1 Écrire la matrice $(p_{i,j})$ où $p_{i,j}$ désigne la probabilité, étant à la page i, d'aller à la page j $(1 \leqslant i, j \leqslant 3)$.

2 Exprimer P_n en fonction de M et de P_0.

3 Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. On admet que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 8 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calculer le produit $Q = P^{-1}MP$ et montrer que $Q = D + T$, où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Calculer T^2. Montrer que $DT = TD = -0,5T$. Montrer que $D^nT = (-0,5)^nT$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

c. Démontrer, par récurrence, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $Q^n = D^n + n(-0,5)^{n-1}T$.

d. Démontrer que $M = PQP^{-1}$ et en déduire l'expression de M^n en fonction de P et Q.

e. Déterminer la limite de la suite (Q^n) et celle de (M^n) quand n tend vers $+\infty$.

4 Exprimer la limite de la suite (P_n) et justifier qu'elle ne dépend pas de l'état initial. Quelle est la page web qui est atteinte avec la probabilité la plus grande par le surfeur aléatoire après un très grande nombre de clics ?

Aides

- **1.** Bien prendre les sommets dans l'ordre et vérifier que la somme de chaque ligne de la matrice est 1.
- **2.** On sait que $P_{n+1} = P_nM$ donc …
- **3. b.** On peut obtenir D^nT en calculant D^n puis D^nT mais aussi par récurrence.
- **4.** Noter $[a\ \ b\ \ c]$ l'état probabiliste initial, avec $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$ et $a + b + c = 1$. Montrer alors que la limite de P_n quand n tend vers $+\infty$ ne dépend pas de cet état initial.

Analyse de l'énoncé

Il s'agit de l'étude asymptotique d'une marche aléatoire. La matrice M est alors particulière car la somme de chaque ligne doit être égale à 1. On remarque que la matrice D est diagonale donc on peut calculer simplement sa puissance n-ième.

Résolutions détaillées sur www.didiermathx.com

Éléments de réponse

1. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $P_n = P_0\,M^n$.

3. b. $DT = TD = -0,5T$ et $T^2 = O_3$, matrice nulle.

c. L'égalité est vraie pour $n = 1$.
Supposons que pour un enter $n \geqslant 1$, $Q^n = D^n + n(-0,5)^{n-1}T$.
Alors $Q^{n+1} = Q^nQ = (D^n + n(-0,5)^{n-1}T)(D + T)$, donc
$Q^{n+1} = D^{n+1} + D^nT + n(-0,5)^{n-1}TD + n(-0,5)^{n-1}T^2$, soit
$Q^{n+1} = D^{n+1} + (n + 1)(-0,5)^nT$, ce qui démontre le résultat.

d. $PQP^{-1} = P(P^{-1}MP)P^{-1} = M$ car $PP^{-1} = P^{-1}P = I_3$, d'où $M^n = PQ^nP^{-1}$.

e. M^n tend vers $M_\infty = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Soit $P_0 = [a\ \ b\ \ c]$ l'état initial avec a, b, c réels positifs de somme 1. Alors P_n tend vers $[a\ \ b\ \ c]M_\infty$ soit $\frac{1}{9}(2\ \ 4\ \ 3)$ car $a + b + c = 1$. Donc c'est la page 2 qui est la plus probable après de très nombreux clics, quelle que soit la page de départ.