

Feuille 1 : Fonction d'une variable réelle : continuité, dérivabilité et convexité.

Master Enseignement de Mathématiques - Analyse

Dans toute la feuille et sauf précision, on considère un intervalle I non vide et non réduit à un point. Certains exercices de la feuille sont inspirés d'exercices ou d'exemples donnés dans les livres d'analyse d'Arnaudès & Fraysse, Moisan et Monier.

I Continuité.

Rappels : compacité, continuité, continuité uniforme.

Cours 1. Il faut absolument maîtriser les points de cours suivants. On considère une partie $D \subset \mathbb{R}$ et une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- Définir la limite de f en $a \in \overline{D}$, la continuité de f en $a \in D$ et la continuité de f sur D .
- Définir l'uniforme continuité de f sur D .
- Enoncer le lien entre continuité de f en $a \in D$ et limite.
- Quelle est la caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction ?
- Savoir énoncer et démontrer les résultats mettant en jeu les limites de fonctions et les opérations algébriques (resp. les compositions).
- Définir le prolongement par continuité de f en $a \in \overline{D} \setminus D$.
- Enoncer un critère de Cauchy nécessaire et suffisant pour que f admette une limite en a .
- Définir la compacité pour une partie $A \subset \mathbb{R}$.
- Caractériser les parties compactes de $\mathbb{R}$.
- Savoir démontrer que l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.
- Savoir démontrer que l'image d'un compact par une application continue est compacte.
- Enoncer et démontrer le théorème de Heine.
- Savoir démontrer la continuité des fonctions usuelles.

Continuité.

Exercice 1. *Un exercice très formateur.* Montrer que si f admet pour limite l en a , et si $l > 0$, alors il existe un voisinage V de a dans D sur lequel f est strictement positive. Montrer que si $l \neq 0$, alors il existe un voisinage V de a dans D sur lequel f ne s'annule pas.

Exercice 2. *Encore un exercice très formateur.* Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f admet des limites l et l' en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer très précisément que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Montrer que toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ admet au moins un point fixe.

Exercice 4. Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on ait $f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 5. Soit a et b deux réels. Montrer que $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$. En déduire que si f et g sont deux fonctions réelles définies sur un intervalle I , alors la fonction $\max(f, g)$ est continue.

Exercice 6.

1. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair. Montrer qu'il admet au moins une racine réelle.

3. Montrer que pour tout entier d pair, il existe un polynôme de degré d à coefficients dans $\mathbb{R}$ sans racines réelles.

2. Montrer que le résultat de la question **1** est optimal en le sens suivant : pour tout d entier positif impair il existe un polynôme de degré d admettant une unique racine réelle qui est simple.

Exercice 7. Fonctions périodiques.

1. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue et périodique est bornée.

2. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique admettant une limite en $+\infty$ est constante.

Continuité uniforme.

Exercice 8. Montrer que toute fonction k -lipschitzienne est uniformément continue. Montrer que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et que sa dérivée est bornée sur I , alors f est uniformément continue.

Exercice 9. On se propose de déterminer parmi les fonctions suivantes lesquelles sont uniformément continues :

$$\begin{aligned} f &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \\ g &: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \\ h &:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x} \\ s &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x} \\ t &: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln x \text{ et} \\ u &:]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|. \end{aligned}$$

1. Essayer de dire le maximum de choses (voir de finir l'exercice !) sans lire les questions suivantes qui guident.

2. Traiter rapidement le cas des fonctions f et s .

3. La fonction s est-elle k -lipschitzienne¹ ? On pourra utiliser l'égalité des accroissements finis.

4. En utilisant les résultats de l'exercice 8, traiter le cas des fonctions t et u .

5. Ecrire une caractérisation des fonctions qui ne sont pas uniformément continues, à partir de la définition de la continuité uniforme.

6. En déduire que les fonctions h et g ne sont pas uniformément continues.

¹Quel est l'intérêt de cette question ?

7. *Peut-être un peu plus dur.* Etudier la continuité uniforme de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}$. (L'écrire proprement !)

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f admet des limites l et l' en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Pour manipuler.

Exercice 11. Dans les deux questions qui suivent, on s'aidera (comme bien souvent) d'un dessin.

1. Etudier la continuité de la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ notée $1_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x irrationnel associe 0 et à x rationnel associe 1.

2. Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x irrationnel associe 0 et à x rationnel associe x . Comment écrire f en termes de $1_{\mathbb{Q}}$?

Exercice 12. Avec a et b deux réels, on définit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$ si $x \leq 1$ et $f(x) = ax + b$ si $x > 1$.

1. Déterminer a et b tels que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Etudier f (régularité, tableau de variation, limites, tracé...).

II Dérivabilité

Cours 2. Il faut absolument maîtriser les points de cours suivants. On considère un intervalle I non vide et non réduit à un point, une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- Définition de la dérivabilité en un point, à droite, à gauche et sur un intervalle. Connaître l'interprétation géométrique.
- Savoir énoncer des théorèmes précis liant dérivation et opérations algébriques, compositions, fonction réciproque.
- Bien sûr connaître, mais également savoir recalculer les dérivées de toutes les fonctions usuelles.
- Connaître le lien entre extremum local et dérivée.
- Énoncer et démontrer le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis et l'inégalité des accroissements finis.
- Énoncer et démontrer le théorème de Taylor-Lagrange.
- Nous en reparlerons plus tard, mais il faut savoir énoncer et démontrer le théorème de Taylor-Lagrange avec reste intégrale, ainsi que celui de Taylor-Young.
- Le théorème de Darboux n'est pas mentionné dans le programme, mais il est utile de le connaître.

Etude de fonctions.

Exercice 13. Déterminer le nombre de zéros dans $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^5 - x^3 + 1$.

Exercice 14.

1. Etudier les variations de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. En déduire² les solutions de l'équation $a^b = b^a$ dans $\mathbb{N}^2$.

Exercice 15. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ on a $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$. Etudier le cas où $x \in \mathbb{R}^{-*}$.

Dérivées successives.

Exercice 16. Calculer les dérivées successives des fonctions :

- 1 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$,
- 2 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$, et
- 3 $h : \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x-a}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Théorèmes des accroissements finis.

Exercice 17. *Inégalités à l'aide du TAF* Démontrer à l'aide de l'égalité des accroissements finis les inégalités suivantes :

- 1 $\forall x \in \mathbb{R}^+, e^x \geq 1 + x$
- 2 $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sin(x) \leq x$ et
- 3 $\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arctan}(x) \leq x$.

On rédigera très précisément (comme d'habitude!) en indiquant entre quels points on applique l'égalité des accroissements finis.

Exercice 18. *Inégalités à l'aide du théorème de Taylor-Lagrange.* Démontrer à l'aide du théorème de Taylor-Lagrange les inégalités :

- 1 $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \cos(x) - 1 \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ et
- 2 $\forall x \in \mathbb{R}^+, (1+x)^{\frac{1}{4}} \geq 1 + \frac{x}{4} - \frac{3}{32}x^2$.

Exercice 19. On suppose la fonction exponentielle définie à partir d'une équation fonctionnelle ou différentielle, et que l'on connaît sa dérivée et sa régularité.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, appliquer la formule de Taylor-Lagrange au rang k à $t \mapsto e^t$ entre 0 et x .
2. Montrer que e^x est la somme de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 20. *Généralisation de l'égalité des accroissements finis.* Soit f et g deux applications continues de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $[a, b]$. On se propose de montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que les vecteurs $(f(b) - f(a), f'(c))$ et $(g(b) - g(a), g'(c))$ soient liés.

1. On considère la fonction $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $t \mapsto (f(t), g(t))$. Interpréter géométriquement.
2. On suppose que $g(a) = g(b)$. Démontrer le résultat souhaité.
3. On suppose que $g(a) \neq g(b)$. Considérer la fonction définie sur $[a, b]$ par $x \mapsto f(x) -$

²On peut proposer (en guidant, par exemple en rajoutant une question demandant de calculer la dérivée) cet exercice en terminale.

$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$ pour conclure.

Exercice 21. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. On suppose f définie et continue sur $[a, b[$, dérivable sur $]a, b[$, et telle que f' admette une limite l en a . Montrer que f est dérivable en a .
2. *Petite variante.* On note $I =]b, c[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I . On suppose f définie et continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et telle que f' admette une limite l en a . Montrer que f est dérivable en a .
3. *Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.* On note $I =]b, c[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I . On suppose f définie et continue sur $I =]b, c[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$, et telle que f' admette une limite l en a . Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
4. *Application.* On considère la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par $x \mapsto \text{Arcsin}(1 - x^3)$. Etudier la continuité et la dérivabilité de g .

Exercice 22. Dédurre de l'égalité des accroissements finis la relation $e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$.

Exercice 23.

1. Dédurre de l'égalité des accroissements finis un équivalent simple de $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$.
2. En déduire la divergence de la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$, et un équivalent de la suite des sommes partielles.

Exercice 24. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin(x) + x$.

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative. (Que faut-il faire quand on pose cette question ?)
2. La fonction f est-elle strictement croissante ?
3. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes ?

Quelques classiques pour manipuler.

Exercice 25. Une fonction lisse à support compact.

- 1 On considère l'application $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-\frac{1}{x^2}}$ avec P_n une fraction rationnelle à coefficients réels dont on précisera le degré.
- 2 Montrer qu'il existe un prolongement par continuité de f à $\mathbb{R}^+$ et que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On notera également f ce prolongement. On pourra utiliser les résultats de l'exercice 21, qui sont d'ailleurs au programme !
- 3 Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et dont la restriction à $\mathbb{R}^+$ est f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- 4 En déduire l'existence d'une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, non nulle sur $I =]0, 1[$ et nulle en dehors de I .

Exercice 26. Polynômes d'Hermite.

1. On considère un intervalle I ainsi que f et g des fonctions définies sur I à valeurs réelles. Montrer le théorème appelé formule de Leibniz : si f et g sont dérivables n fois sur I , alors fg

l'est également et on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

2. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ avec H_n un polynôme à coefficients réels de degré n . Donner une relation simple entre H_{n+1} , H_n et H'_n . Les polynômes H_n sont appelés polynômes d'Hermite³.

3. Calculer H_0, H_1 et H_2 .

4. Dédurre d'une relation simple entre f et f' l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{n+1} - xH_n + nH_{n-1} = 0.$$

5. En déduire pour tout entier $n \geq 1$ les égalités

$$\begin{aligned} H'_n &= nH_{n-1} \text{ et} \\ H''_n - xH'_n + nH_n &= 0. \end{aligned}$$

6. *Théorème de Rolle généralisé.* On considère une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, et un réel a . Montrer que si $g(a) = 0$ et si g a une limite nulle en $+\infty$, alors g' s'annule sur l'intervalle $]a, +\infty[$.

7. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ le polynôme H_n est scindé sur $\mathbb{R}$, que toutes ses racines sont simples et que pour tout entier $n \geq 2$ les racines de H_{n-1} séparent celles de H_n (i.e : qu'entre deux racines de H_n il existe une racine de H_{n-1} et une seule).

III Convexité.

Points de cours.

Cours 3. Il faut absolument maîtriser les points de cours suivants.

- Connaître la définition d'une partie convexe $A \subset \mathbb{R}^n$, de l'épigraphe d'une fonction, d'une fonction convexe et la caractérisation de la convexité d'une fonction avec une inégalité.
- Connaître le lien entre la convexité et les inégalités de pente (donner trois propositions équivalentes...).
- Connaître la caractérisation de la convexité mettant en jeu le barycentre de n points.
- Connaître le lien entre dérivabilité et convexité. Savoir énoncer (et redémontrer...) un théorème positionnant la courbe et ses tangentes.
- Savoir énoncer et démontrer un théorème liant convexité et dérivée seconde.

³Pensons un instant à la famille des fonctions trigonométriques $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$: il s'agit une base hilbertienne de l'espace des fonctions de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}$ et de carré intégrable si l'on considère le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. C'est-à-dire que ces vecteurs sont orthogonaux, et que toute fonction peut être approchée aussi près qu'on le souhaite par une combinaison linéaire (donc finie) de ces vecteurs. En fait, les polynômes de Laguerre, de Tchebychef, d'Hermite (et d'autres...) forment également des bases hilbertiennes d'espaces de fonctions pour un bon choix de produit scalaire. Par exemple, les polynômes d'Hermite introduits dans l'exercice sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int f(x)g(x)e^{-x^2}dx$. Les projections sur les sous-espaces de dimension finie engendrés par les polynômes de degré bornés fournissent des méthodes d'approximation utilisées en analyse numérique comme dans le cas des séries de Fourier. La littérature très riche sur ce vaste sujet mais également la diversité des domaines mis en jeu (algèbre des polynômes, algèbre inéaire, analyse, analyse fonctionnelle...) en font des sujets de concours récurrents : voir par exemple le sujet du capes externe de 1989 ou celui du capes agricole de 1992.

Quelques fonctions convexes.

Exercice 27. Montrer que l'application $f :]e, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(\ln x)$ est concave sur son ensemble de départ.

Exercice 28. *Etude de fonction et convexité.* On considère l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$ et par $f(0) = 1$.

1. Pour u réel, comparer u et $th(u)$.
2. Rechercher les asymptotes de la courbe représentatives de f .
3. Etudier la régularité de f sur $\mathbb{R}^*$.
4. Donner une expression simple de $f(x) + \frac{x}{2}$ faisant intervenir les fonctions hyperboliques. En déduire une propriété géométrique de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
5. Etablir que pour $x \neq 0$ on a

$$f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2th(\frac{x}{2})} - \frac{\frac{x}{4}}{sh^2(\frac{x}{2})} \text{ et}$$

$$f''(x) = \left(\frac{x}{2} - th\left(\frac{x}{2}\right)\right) \frac{\frac{ch(x)}{2}}{2sh^3(\frac{x}{2})}.$$

6. Montrer que f se prolonge par continuité en 0.
7. Etudier la dérivabilité de ce prolongement.
8. Montrer que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^2$ et que f est convexe.

Inégalités de convexité.

Exercice 29. Montrer les inégalités suivantes en utilisant la convexité ou la concavité de fonctions :

- 1 $\forall x \in \mathbb{R}^+, e^x \geq 1 + x$
- 2 $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$ et
- 3 $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$.

Exercice 30. *Inégalité arithmético-géométrique, inégalité de Holder.*

1 On considère n réels strictement positifs $x_1, \dots, x_n$ et n réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme 1. Minorer $\ln\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)$ en utilisant la concavité de la fonction $\ln$.

2 En déduire l'inégalité

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

et son cas particulier :

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

3 Soit p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et u et v dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer l'inégalité :

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

4 Soit alors $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres réels strictement positifs. Montrer l'inégalité de Holder⁴ :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Exercice 31. *Inégalité de Minkowski.*

1 Soit p un nombre réel supérieur ou égal à 1 et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres réels strictement positifs. Montrer l'inégalité de Minkowski pour les sommes finies :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{p}} \right)^p + \left(\sum_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{p}} \right)^p \leq \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{\frac{1}{p}} \right)^p$$

des deux façons suivantes :

1 en utilisant l'inégalité de Holder,

2 ou en étudiant la fonction $x \mapsto (1 + x^p)^{\frac{1}{p}}$.

3 On considère l^p l'ensemble des suites (a_n) telles que la série $\sum |a_n|^p$ converge. Montrer que l^p est un espace vectoriel. Montrer qu'en posant $\|(a_n)\|_p = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ on munit l^p d'une norme⁵.

Minimum d'une fonction convexe⁶

Exercice 32. Soit I un intervalle ouvert et f une fonction réelle dérivable sur I .

1 Prouver que f est convexe sur I si et seulement si

$$\forall x \in I \forall a \in I \quad f(a) + f'(a)(x - a) \leq f(x).$$

2 En déduire qu'une fonction convexe et dérivable sur I a un minimum en $x_0 \in I$ si et seulement si $f'(x_0) = 0$.

3 On suppose maintenant f convexe mais pas nécessairement dérivable. Montrer que f admet au plus un minimum local, et que s'il existe c'est un minimum global.

4 Montrer qu'une fonction convexe n'admet pas nécessairement un minimum.

IV Des questions à se poser...

Exercice 33. *Quiz*

On considère I un intervalle non réduit à un point, $a \in I$ et une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Pour chacune des propositions suivantes, préciser si elle est vraie (en la démontrant) ou fausse (en donnant un contre-exemple) :

- a) Si f est continue sur I alors f est dérivable sur I .
- b) Une fonction continue sur un intervalle borné y est uniformément continue.
- c) Si f est convexe sur I elle est dérivable sur I .
- d) Si f est convexe sur I elle est continue sur I .

⁴Quelle inégalité célèbre généralise-t-on ici ?

⁵Comment retenir facilement l'inégalité de Minkowski ? Etudier le cas où $p \geq 1$

⁶La convexité permet d'obtenir rapidement de nombreuses inégalités. Il s'agit également d'une notion très utile lors de recherches d'extrema.

- e) Une fonction constante admet en tout point de son ensemble de départ un minimum local et un maximum local.
- f) Si f est positive et non majorée, elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
- g) Si une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et si $f(0) = f(1)$, alors il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.
- h) Si f est dérivable sur I , alors sa fonction dérivée est continue sur I .
- i) Si f est dérivable en un point $a \in I$, alors la restriction du graphe de la fonction à un voisinage de a est situé d'un côté de la tangente à la courbe en $(a, f(a))$.
- j) L'encadrement $0 \leq \sin(x) \leq x$ est bien pratique pour prouver la continuité de la fonction $\sin$ en 0. Pour le prouver, on peut étudier les variations de la fonction $x \mapsto x - \sin(x)$ en la dérivant par exemple.
- k) Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, $f(a) = 0$ et $f'(a) > 0$, alors il existe un voisinage de a sur lequel f est positive.
- l) La fonction f est concave si et seulement si elle est deux fois dérivable et si sa dérivée seconde est négative.
- m) Soit $l \in \mathbb{R}$. La fonction f admet pour limite l en $+\infty$ si et seulement si la suite $f(n)$ tend vers $+\infty$.
- n) Soit $l \in \mathbb{R}$. La fonction f admet pour limite l en $+\infty$ si et seulement si $f(x) \sim_{+\infty} l$.
- o) Le produit de deux applications uniformément continues est uniformément continu.
- p) Si f est dérivable et paire, alors f' est paire.
- q) Si f est k -lipschitzienne sur I , elle est dérivable sur I .