Feuille 2 : Séries numériques.

Master Enseignement Spécialité Maths

Conseils

On accordera une importance toute particulière aux démonstrations des théorèmes du cours. Certains exercices de cette feuille sont inspirés du livre d'Arnaudiès et Fraysse (*Tome II - Analyse*). On peut réviser sur un des livres de Monier, ou sur le livre de Combes *Suites et séries* par exemple.

I Principaux théorèmes du cours.

Du cours !!

`Exercice 1.` Il faut absolument maîtriser les points de cours suivants. On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de nombres complexes.

- Définir la convergence de la série $\sum u_n$.
- Définir la convergence absolue de la série $\sum u_n$.
- Enoncer le critère de Cauchy pour la série $\sum u_n$.
- Montrer que la convergence absolue de $\sum u_n$ entraîne la convergence de $\sum u_n$.
- Enoncer et démontrer le théorème de comparaison des séries à termes positifs.
- Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors u_n converge vers 0.
- Quel lien y a-t-il entre les convergences de $\sum u_n$, $\sum Re(u_n)$ et $\sum Im(u_n)$?
- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Enoncer un théorème reliant les convergences des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum (u_n + \lambda v_n)$.
- Démontrer que la série de Riemann[1] $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- Enoncer et démontrer un théorème de comparaison mettant en jeu un O.
- Enoncer et démontrer un théorème de comparaison mettant en jeu un équivalent.
- Enoncer et démontrer la règle de d'Alembert.
- Enoncer et démontrer la règle de Cauchy.
- Enoncer et démontrer[2] le théorème des séries alternées.

`Exercice 2.` *Notations.* On rencontre les notations $\sum u_n$, $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $\sum_{n \geq 0} u_n$. Que signifient-elles ? Quand a-t-on le droit de les employer ?

`Exercice 3.` *Exercice guidé sur les séries alternées.* On note (v_n) une suite de $\mathbb{R}_+$ qui tend en décroissant vers 0.

[1] On définit ainsi une fonction $\zeta \; : \;]1, +\infty[\to \mathbb{R}$. Cette fonction s'étend en un sens au plan complexe presque entier. Elle est liée à la théorie des nombres, à la répartition des nombres premiers. Il est conjecturé que ses zéros non triviaux se trouvent sur la droite $Re(z) = \frac{1}{2}$. Cette conjecture résiste toujours aux efforts des mathématiciens, et est mise à prix un million de dollars ! De 1826 à 1866, Riemann, mathématicien allemand de génie, apporte beaucoup à la discipline : fondements de l'analyse, définition de l'intégrale, séries trigonométriques, équations différentielles, théorie des nombres. En géométrie différentielle, on étudie les surfaces de Riemann...

[2] A savoir retrouver tout seul...l'exercice 3, guidé, propose toutefois d'en retrouver la démonstration.

1. On définit une suite (u_n) par l'égalité $u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k$. Montrer que les suites extraites s_{2n} et s_{2n+1} sont adjacentes.
2. Montrer que la série $\sum (-1)^n v_n$ est convergente. On note l sa limite.
3. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k$ le reste d'ordre n de la série convergente. Etudier le signe de R_n et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|R_n| \leq v_{n+1}$. On pourra étudier selon la parité de n.

`Exercice 4.` *Premier contact avec la série harmonique.* Démontrer que la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. On pourra par exemple mettre le critère de Cauchy en défaut en considérant la somme du terme n au terme $2n$.

II Pour manipuler

Une première série de séries pour se faire la main

`Exercice 5.` Etudier la convergence des séries de termes généraux :

a) $\frac{n}{n+1}$ **b)** $\frac{n}{n^2+1}$ **c)** $\frac{1}{n!} + \frac{i}{\sqrt{n}}$ **d)** $\exp(-n^3+1)$
e) $\frac{\ln(n)}{n^2}$ **f)** $\frac{\sin(n)n^5 8^n}{3^{2n+1}}$ **g)** $Arctan(\frac{1}{1+n+n^2})$
h) $\frac{n^2 \exp(\ln(n)i)\ln(n)}{\cosh(n)}$ **i)** $\left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$ **j)** $\frac{n^{\ln(n)}}{(\ln^n(n))}$
k) $\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ **l)** $\frac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}$ **m)** $\frac{3n+\sin(n)i}{n^3+n-1}$
n) $\frac{n!}{n^n}$ **o)** $\frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$ et **p)** $n^5\exp(-\sqrt{n})$.

Une deuxième série de séries pour ne pas perdre la main

`Exercice 6.` Etudier ... la convergence des séries de termes généraux :

a) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ **b)** $\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}+(-1)^n n^{\frac{1}{3}}}$ **c)** $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ **d)** $\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$
e) $n^{\frac{1}{n^2}}-1$ **f)** $(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ **g)** $\frac{(-1)^n}{-n+10\sqrt{n}+1}$
h) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ **i)** $\frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$ et **j)** $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$.

`Exercice 7 .` *Séries de Bertrand.* On se propose d'étudier la convergence des séries de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$.
1. On suppose $\alpha > 1$. Montrer que pour tout $\gamma < \alpha$ on a $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} = o(\frac{1}{n^\gamma})$. Conclure.
2. On suppose $\alpha < 1$. Montrer que pour tout $\gamma > \alpha$ il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N on ait $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \geq \frac{1}{n^\gamma}$. Conclure.

3. On suppose que $\alpha = 1$ et on considère la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha \ln^\beta(t)}$.
Montrer qu'il existe un entier N tel que f soit décroissante sur $[N, +\infty[$. Montrer que pour tout entier $n > N$ on a :

$$\int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt.$$

4. En déduire un encadrement de $\sum_{n=N+1}^{A} f(n)$ pour tout entier $A > N$.
5. Conclure.

III Des questions à se poser...

`Exercice 8.` *Une erreur classique...*

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

2. Montrer de deux façons que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ converge.

3. Démontrer que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

4. Démontrer que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\Big(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\Big)$.

5. Etudier très soigneusement la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

6. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

`Exercice 9.` *Quizz* On considère des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de nombres complexes. Pour chacune des propositions suivantes, préciser si elle est vraie (en la démontrant) ou fausse (en donnant un contre-exemple).

a) La série $\sum u_n$ converge si et seulement si u_n converge vers 0.
b) On suppose que (u_n) et (v_n) sont deux suites de nombres réels. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq v_n$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
c) Si $\sum u_n$ converge, il existe $\alpha > 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour $n \geq N$ on ait $|u_n| \leq \frac{1}{n^\alpha}$.
d) La série $\sum u_n$ converge si et seulement si elle converge absolument.
e) Pour tout polynôme P on a la série de terme général $P(n)e^{-n}$ qui converge.
f) Si la suite $T_n = \sum_{k=0}^{2n} u_k$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
g) On suppose que (u_n) et (v_n) sont deux suites de rationnels positifs. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq v_n$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge dans $\mathbb{Q}$.
h) Si la suite $T_n = \sum_{k=0}^{2n} u_k$ converge et si u_n converge vers 0, alors la série $\sum u_n$ converge.
i) Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors la série $\sum u_n v_n$ est convergente.
j) Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la série $\sum u_n v_n$ est absolument convergente.
k) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que $\sum u_n + \lambda v_n$ est convergente. Alors $\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + \lambda v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.
l) Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

IV Exercices classiques.

Sommes classiques

Exercice 10. Il faut savoir retrouver rapidement une expression simple des sommes finies suivantes :

a) $\sum_{k=0}^{n} \exp(ik\theta)$ **b)** $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$ **c)** $\sum_{k=0}^{n} k\sin(k\theta)$
d) $\sum_{k=0}^{n} x^k$ **e)** $\sum_{k=0}^{n} kx^k$ et **f)** $\sum_{k=0}^{n} k^2x^k$.

Transformation d'Abel

Exercice 11. On considère deux suites complexes (u_n) et (v_n). On s'intéresse à la convergence de la série $\sum u_n v_n$. Pour $n \geq 1$, on note $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
1. Rappeler comment s'écrit le critère de Cauchy pour la série $\sum u_n v_n$.
2. Montrer que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $1 \leq p \leq q$ on a :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k v_k \;=\; s_q v_q - s_{p-1} v_p + \sum_{k=p}^{q-1} s_k(v_k - v_{k+1}).$$

C'est en fait cette égalité qui est appellée transformation d'Abel[3].
3. Montrer que si la suite (s_n) est bornée et la suite (v_n) à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, décroissante et de limite nulle, alors $\sum u_n v_n$ est convergente.
4. *Application.* Soit j la racine troisième de l'unité de partie réelle strictement positive. Montrer que la série de terme général $\frac{j^n}{\ln(n)}$ est convergente.
5. Redémontrer la convergence des séries alternées à l'aide de ce qui précède.
6. *Une variante...* Montrer que si $\sum u_n$ converge, (v_n) est décroissante et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors $\sum u_n v_n$ converge.
7. Montrer que si (s_n) est bornée, (v_n) converge vers 0 et $\sum |v_{n+1} - v_n|$ converge, alors $\sum u_n v_n$ converge.

Exercice 12. *Une application de la transformation d'Abel.* On s'intéresse à la convergence de la série $\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ pour $\theta \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$.
1. Traiter le cas où $\alpha > 1$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} \;=\; \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

3. En déduire (avec le résultat de la question 3 de l'exercice précédent) la convergence de la série considérée lorsque $\alpha \in]0, 1[$.
4. Montrer que si $\theta \in \mathbb{Z}\pi$, alors la série n'est pas absolument convergente.
5. Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $|\cos(n\theta)| \geq \frac{1+\cos(2n\theta)}{2}$.
6. Montrer que si $\alpha \in]0, 1[$ alors la série n'est pas absolument convergente.
7. *Peut-être un peu plus dur...* Montrer que la série est divergente si $\alpha = 0$ puis si $\alpha \leq 0$.

[3] Cette même transformation s'applique parfois aux séries de fonctions. Une application en est le théorème de convergence radiale d'Abel. Que dit-il au juste ?

Produit de deux séries

Exercice 13. On considère deux suites complexes (u_n) et (v_n). On leur associe la suite (w_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$$

Cette suite est appelée produit de convolution[4] des deux suites (u_n) et (v_n).

a) On note $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$ les sommes partielles des trois séries. Montrer que pour tout entier naturel n on a l'encadrement

$$U_{E(\frac{n}{2})} V_{E(\frac{n}{2})} \leq w_n \leq U_n V_n.$$

b) Montrer que si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors la série $\sum w_n$ est absolument convergente, et que sa somme est le produit des sommes de $\sum u_n$ et $\sum v_n$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right).$$

c) En déduire en utilisant le développement en série entière de la fonction exponentielle que pour tout $(t, z) \in \mathbb{C}^2$ on a $\exp(t+z) = \exp(t)\exp(z)$.

d) Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. En utilisant les séries $\sum a^n$ et $\sum b^n$ de sommes respectives $\frac{1}{1-a}$ et $\frac{1}{1-b}$, montrer que :

$$\text{si } a \neq b, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} = \frac{1}{(1-a)(1-b)}$$

$$\text{si } a = b, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a^n = \frac{1}{(1-a)^2}.$$

e) En considérant par exemple les suites $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{\frac{1}{4}}}$, montrer que la convergence des séries n'implique pas la convergente de la série produit.[5]

V Séries et équivalents.

Exercice 14. *Du cours !* Enoncer un théorème assurant l'équivalence des restes de deux séries convergentes dont les termes sont équivalents. De même, donner un théorème assurant l'équivalence des sommes partielles de deux séries divergentes dont les termes sont équivalents.

Etude de quelques restes.

Exercice 15. Soit $\alpha > 1$. On note $(u_n)_{n>1}$ la suite définie par son terme général

$$u_n = \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

[4] Comment définit-on le produit de convolution de deux fonctions ?

[5] Toutefois, le théorème de Mertens (hors programme!) affirme que le résultat subsiste si une série est convergente et l'autre absolument convergente.

1. Montrer que $u_n \sim \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$.
2. En calculant $\sum_{k=2}^{n} u_k$, montrer que $\sum u_k$ converge.
3. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
4. Montrer que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge et donner un équivalent de la suite des restes.

`Exercice 16.` Préciser le reste[6] ou une majoration du reste dans les cas :
1. d'une série géométrique convergente,
2. d'une série pour laquelle le critère de d'Alembert s'applique,
3. d'une série pour laquelle le théorème de Cauchy s'applique
4. et dans le cas d'une série alternée.

Remarque : Il manque pour l'instant un encadrement du reste pour les séries qui se déduit de la comparaison à une intégrale généralisée. Nous en parlerons plus tard.

Développement asymptotique de la série harmonique.

`Exercice 17.` Pour $n \geq 1$ on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la somme partielle de la série harmonique.
1. Montrer que $\ln(n+1) - \ln(n) \sim \dfrac{1}{n}$.
2. Retrouver que H_n diverge vers $+\infty$ et que $H_n \sim \ln(n)$.
3. On note $\sigma_n = H_n - \ln(n)$. Montrer qu'on peut définir une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que σ_n corresponde à la somme partielle des u_k, c'est-à-dire telle que pour tout entier n on ait $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
4. Montrer que $u_n \sim \dfrac{-1}{2n^2}$ et en déduire que la suite σ_n est convergente. Cette limite est notée γ et appelée constante d'Euler[7].
5. On étudie maintenant $r_n = \gamma - \sigma_n$. Trouver un équivalent de r_n et justifier le développement asymptotique

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

6. On souhaite pousser plus loin le développement asymptotique. On étudie alors la suite de terme général $\tau_n = \sigma_n - \gamma - \dfrac{1}{2n}$ grâce à la série associée de terme général $v_n = \tau_n - \tau_{n-1}$. Montrer que

$$H_n \;=\; \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

On pourrait pousser plus loin le développement asymptotique...

[6] Ces données pourront être utilisées pour montrer la convergence uniforme de certaines séries de fonctions. Montrer par exemple que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+x+1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

[7] L'oeuvre colossale de ce mathématicien suisse concerne un grand nombre de domaines des mathématiques et marque le dix-huitième siècle. Il laisse son nom à la fonction Γ d'Euler (une fonction qui prolonge en un sens et à une partie du plan complexe la fonction factorielle), à la droite et au cercle d'Euler d'un triangle, à l'identité $e^{ix} = ...$, à l'indicateur $\phi(n)$ qui compte le nombre d'éléments inversibles de $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \times\right)$, à une équation différentielle... On lui doit les notations e, i, π, mais également sin, cos... !