# Feuille 3 : Suites et séries de fonctions.

Master Enseignement de Mathématiques - Analyse

Cette feuille est très inspirée de la feuille d'Antoine Douai.

## I Programme du Test pour la semaine prochaine.

`Cours 1.` Quand le contexte n'est pas clair, c'est à vous de le préciser.

• Définir la convergence d'une suite de fonctions.
• Définir la convergence d'une série de fonctions.
• Définir la convergence d'une suite de fonctions en termes de quantificateurs.
• Définir la convergence d'une série de fonctions en termes de quantificateurs.
• Définir la convergence uniforme d'une suite de fonctions.
• Définir la convergence uniforme d'une suite de fonctions en termes de quantificateurs.
• Définir la convergence absolue d'une série de fonctions.
• Définir la convergence uniforme d'une série de fonctions.
• Définir la convergence normale d'une série de fonctions.
• Dessiner le diagramme des implications des 4 types de convergence pour les séries de fonctions.

• Enoncer et démontrer un théorème assurant qu'une limite de fonction uniforme est continue.
• Enoncer et démontrer un théorème permettant d'intervertir limite et intégrale d'une suite de fonctions sur un segment.
• Enoncer un théorème assurant la dérivabilité d'une limite de suite de fonctions.
• Enoncer un théorème assurant la dérivabilité d'une somme de fonctions.

• Démontrer que si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites réelles telles que $u_n \sim v_n$ , alors $u_n$ et $v_n$ sont de même signe à partir d'un certain rang.
• Montrer rapidement et proprement que la fonction $f\ :\ \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0.
• Quelle est la caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction en un point ?
• Caractériser *en deux mots* les parties compactes d'un e.v.n de dimension finie sur $\mathbb{R}$.
• Savoir démontrer que l'image d'un compact par une application continue est compacte.

# II En pratique

### Suites de fonctions.

`Exercice 1.` Etudier la convergence et la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes :

• $f_n \; : \; [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = x^n$.
• $g_n \; : \; [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0,1], \quad g_n(x) = x^n(1-x)^n$. Etudier la limite de la suite $\int_0^1 x^n(1-x)^n dx$.
• $h_n \; : \; \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h_n(x) = xe^{-nx}$.
• $s_n \; : \; \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad s_n(x) = nxe^{-nx}$.
• $t_n \; : \; \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad t_n(x) = \ln(1 + \frac{x}{n})$.
• $u_n \; : \; \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \frac{x^n-1}{x^n+1}$.

### Séries de fonctions.

`Exercice 2.` Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considre la fonction $u_n \; : \; \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.
**1.** Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. On note $f$ sa somme.
**2.** Montrer que pour tout $M > 0$ on a convergence normale de $\sum u_n$ sur l'intervalle $[0, M]$.
**3.** Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

`Exercice 3.` On considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.
**1.** Prouver que $S$ est bien définie sur $I = ]-1, +\infty[$.
**2.** Etudier la convergence uniforme de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.
**3.** Etudier la continuité de $S$ sur $I$.
**3.** Etudier la dérivabilité de $S$ sur $I$.
**3.** Etudier la monotonie de $S$ sur $I$.

`Exercice 4.`
**1.** Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}$ converge simplement sur $]-1,1]$. On note $S$ sa somme.
**2.** Montrer que $S$ est dérivable sur $]-1,1[$.
Calculer $S'$ sur $]-1,1[$ et en dduire une expression de $S$.
**3.** Etudier la convergence uniforme de $\sum \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}$ sur $[0,1]$. Que peut-on dire pour la continuité de $S$ ?
**4.** En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.