

Feuille 4 : Séries entières et séries de Fourier

Master Enseignement de Mathématiques - Analyse

I Programme du Test pour la semaine prochaine.

Cours 1. On considère une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Quand le contexte n'est pas clair, c'est à vous de le préciser.

- Donner une définition du rayon de convergence d'une série entière.
- Si $z_0 \in \mathbb{C}$ est tel que $\sum a_n z_0^n$ diverge, que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum a_n z^n$?
- Si $z_0 \in \mathbb{C}$ est tel que $\sum a_n z_0^n$ converge, que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum a_n z^n$?
- Si $z_0 \in \mathbb{C}$ est tel que $a_n z_0^n$ ne converge pas vers 0, que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum a_n z^n$?
- Si $z_0 \in \mathbb{C}$ est tel que $a_n z_0^n$ est bornée, que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum a_n z^n$?
- Si $\sum a_n z_0^n$ a pour rayon de convergence R , proposer des disques sur lesquels on sait qu'il y a convergence normale de la série entière.
- Si $\sum a_n z_0^n$ a pour rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$, faire un dessin résumant ce que l'on sait sur la convergence de la série entière.
- Que peut-on dire sur la régularité d'une somme de série entière ?
- Que peut-on dire de la dérivée d'une série entière ?
- Que peut-on dire du produit de deux séries entières ?
- Calculer le rayon de convergence de $\sum e^{-\sinh(n)} z^n$.
- Calculer le rayon de convergence de $\sum \frac{n^2+n!}{n^2+2^n} z^n$.
- Calculer le rayon de convergence de $\sum 5^n \frac{\ln(n)}{n^2+n} z^{2n}$.
- Connaître les développements limités usuels, avec rayon de convergence et ensemble de validité.

II Séries entières en pratique

Exercice 1. Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sum \frac{5n^2-n+7}{n^2-3} z^n & \text{b) } \sum \sqrt{n+1} \ln(e^2 n + 1) z^n \\ \text{c) } \sum \frac{n!}{n^n} z^n & \text{d) } \sum \frac{3^n}{n+2} z^n \\ \text{e) } \sum (1 + (-1)^n) z^n & \text{f) } \sum 3^n n^2 z^{2n} \quad \text{g) } \sum \sin(n) z^n. \end{array}$$

Exercice 2. *Développement en série entière de fractions rationnelles.* On considère $(\lambda, \mu, x_0) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\mu \neq x_0$.

1. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \frac{\lambda}{x-\mu}$ au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence ?
2. Même question, mais au voisinage de x_0 .
3. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \frac{\lambda}{(x-\mu)^2}$ au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence ?
4. Donner le développement en série entière en 0 de l'application $z \mapsto \frac{10z}{z^3-2z^2+z-2}$, ainsi que le rayon de convergence.

Exercice 3. *Tiré du Capes 2008.*

1. Montrer la convergence de la série $\sum \frac{x^n}{2^n}$.
2. Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \frac{x^n}{2^n}$.
3. En considérant la série dérivée, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2$.

Exercice 4. *D'après Capes 2007.*

1. Déterminer pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum \frac{x^n}{n^2}$ converge.
2. Pour tout $x \in [-1, 1]$ on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Montrer que f est continue sur $[-1, 1]$.
3. Justifier que f est dérivable sur $] -1, 1[$, et donner une expression de f' comme série entière.
4. Pour tout $x \in [-1, 1]$, justifier l'existence de l'intégrale

$$Li(x) = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt.$$

5. Montrer que pour tout $x \in] -1, 1[$ on a $f(x) = Li(x)$.

Exercice 5. *Inspiré du Capes 2006.*

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n}$ converge simplement sur $] -1, 1]$. On note S sa somme.
2. Montrer que S est dérivable sur $] -1, 1[$.
Calculer S' sur $] -1, 1[$ et en déduire une expression de S .
3. Etudier la convergence uniforme de $\sum \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n}$ sur $[0, 1]$. Que peut-on dire pour la continuité de S ?
4. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

III Applications des séries entières

Application aux équations différentielles.

Exercice 6. On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + xy' + y = 0$.

1. Supposons qu'une solution y de (E) soit développable en série entière sur l'intervalle $] -R, R[$ avec $R > 0$. Notons $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les coefficients de ce développement, de sorte que pour $|x| < R$ on ait $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$. Prouver que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a :

$$c_{n+2} = -\frac{1}{n+2} c_n.$$

2. En déduire une expression de c_{2n} et de c_{2n+1} en fonction de n , c_0 et c_1 .
3. Ecrire le développement en série entière de y si on suppose $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. On le note y_0 . Ecrire de même le développement en série entière de y si on suppose $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. On le note y_1 .
4. Calculer le rayon de convergence de chacune des séries définies à la question précédente.
5. Vérifier que y_0 et y_1 forment une base de l'espace des solutions de (E), et donner une expression simple de y_0 .

Application au dénombrement.

Exercice 6. Nombres de Catalan. On considère un ensemble E muni d'une loi interne, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$ de n éléments distincts de E . On note a_n le nombre de parenthésages de $x_1 \dots x_n$, c'est-à-dire le nombre de façons de calculer $a_1 \dots a_n$ après avoir placé des parenthèses. On considère que deux parenthésages sont les mêmes s'ils aboutissent au même calcul : ainsi, $(x_1 x_2)$ et $(x_1)(x_2)$ seront considérés comme des parenthésages identiques.

1. Ecrire et compter les parenthésages quand $1 \leq n \leq 4$. Vérifier que $a_1 = a_2 = 1$, puis que $a_3 = 2$ et $a_4 = 5$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.
3. On considère la série entière $\sum a_n x^n$. On suppose dans cette question que son rayon de convergence R est non nul, et on note S sa somme. Montrer que $\forall x \in]-R, R[$, $S^2(x) - S(x) + x = 0$.
4. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$ est développable en série entière et calculer son développement.
5. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{n}$.

IV Programme du Test sur les séries de Fourier.

Cours 2. Quand le contexte n'est pas clair, c'est à vous de le préciser.

- Donner un espace préhilbertien qui peut être un cadre pour la théorie des séries de Fourier. Démontrer que c'est bien un espace préhilbertien !
- Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans ce contexte.
- Donner les coefficients de Fourier dans le cadre de fonctions continues par morceaux et T -périodiques.
- Rappeler quelle est la somme partielle de la série de Fourier associée à une fonction f . Dans le cas où f est à valeurs réelles, donner une expression faisant apparaître les fonctions cosinus et sinus.
- Donner un énoncé du théorème de Parseval.
- Donner un énoncé de la formule de Parseval.
- Donner un énoncé du théorème de Dirichlet.
- Donner un énoncé du théorème de convergence normale.

IV Pour travailler le cours autour des séries de Fourier.

Espaces vectoriels normés.

Exercice 7. *Norme 1.* Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$, on note $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$.

2. Dans cette question, on considère que $a = -1$ et $b = 1$, et que $(f_n)_{n \geq 1}$ est la suite de fonctions réelles définies sur $[-1, 1]$ par $\forall x \in [-1, 1], f_n(x) = x^n$. Montrer que (f_n) converge vers la fonction nulle dans $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$ mais pas dans $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

3. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ on ait $\|f\|_1 \leq C\|f\|_\infty$.

4. Est-ce qu'il existe une constante $D \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ on ait $\|f\|_\infty \leq D\|f\|_1$?

Exercice 8. *Produit scalaire hermitien et Norme 2.* Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Pour tout couple $(f, g) \in (\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}))^2$, on note $\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)}g(x) dx$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$.

2. Soit $(f, g) \in (\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}))^2$. Montrer qu'on peut choisir $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\langle e^{i\theta}f, g \rangle \in \mathbb{R}_+$.

3. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la redémontrer en considérant le signe de $\langle e^{i\theta}f + \lambda g, e^{i\theta}f + \lambda g \rangle$.

4. Redémontrer qu'en posant $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ on munit $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ d'une norme.

5. On définit $\langle f, g \rangle$ de la même façon pour $(f, g) \in (\mathcal{CPM}([a, b], \mathbb{C}))^2$. Montrer que ce n'est pas un produit scalaire hermitien.

6. On note $D_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions f 2π -périodiques telles que la restriction de f à $[0, 2\pi]$ soit continue par morceaux, et que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ on ait $f(x_0)$ égale à la moyenne des limites à gauche et à droite de f en x_0 . Montrer que la restriction de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à $D_{2\pi}$ est un produit scalaire hermitien¹. La restriction de $\|\cdot\|_2$ est donc une norme.

Cours sur les séries de Fourier.

Exercice 9. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$, et $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la famille $(x \mapsto \sin(ix))_{i \in \{0 \dots n\}}$ est orthogonale.

2. Que peut-on en déduire pour la dimension de F ?

3. Déterminer $F^\perp$. *Indication :* Si $f \in F^\perp$, on pourra considérer la fonction $t \mapsto tf(t)$ définie sur $[0, 1]$.

4. Que est l'intérêt de cet exercice ?

¹L'espace $D_{2\pi}$ sera un cadre possible pour la théorie des séries de Fourier.

Exercice 10. Éléments de cours sur la projection orthogonale. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dont on note $\|\cdot\|$ la norme induite. On considère F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 1$, et $(f_1, \dots, f_n)$ une base orthonormale de F .

1. Montrer que $E = F \oplus F^\perp$, et que si on note p le projecteur orthogonal sur F , on a

$$\forall x \in E, p(x) = \sum_{k=1}^n \langle f_k, x \rangle f_k.$$

2. On considère un élément x de E . Montrer que

$$\forall f \in F, \|x - f\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2.$$

On réalisera un dessin.

3. En déduire que la borne inférieure de $\{\|x - f\| \mid f \in F\}$ est atteinte en un unique point de F que l'on précisera.

4. Montrer que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$. Montrer que p est continue. Quelle est la norme d'application linéaire de p ?

5. Remarquer que tout ce qui précède reste valable dans le cas d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E muni d'un produit scalaire.

6. Application : On considère $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini pour deux éléments f et g de E par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. On note F le sous espace vectoriel de E engendré par les fonctions $t \mapsto 1$ et $t \mapsto t$.

a. En appliquant le procédé de Gram-Schmidt, donner une base orthonormale de F .

b. En déduire le projeté orthonormal de $t \mapsto t^2$ sur F .

c. Déterminer

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - a - bt)^2 dt.$$

IV Séries de Fourier.

Exercice 11. Éléments de cours sur les séries de Fourier Dans cet exercice on considère l'espace préhilbertien $E_{2\pi}$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π -périodiques, à valeurs complexes. On munit $E_{2\pi}$ du produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini pour tout couple (f, g) d'éléments de $E_{2\pi}$ par $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$. On notera $\|\cdot\|_2$ la norme induite. (Dans ce qui suit, rien ne changerait si on considérait la place l'espace $D_{2\pi}$ défini dans l'exercice 4.)

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on considère l'élément e_n de $E_{2\pi}$ défini par $\forall x \in \mathbb{R}, e_n(x) = e^{inx}$. Montrer que la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $\mathcal{P}_n$ le sous-espace vectoriel de $E_{2\pi}$ engendré par les vecteurs e_k pour $-n \leq k \leq n$. Calculer pour tout $f \in E_{2\pi}$ la projection orthogonale $p_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k e_k$ de f sur $\mathcal{P}_n$, c'est-à-dire donner une expression intégrale des coefficients c_k .

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in E_{2\pi}$ à valeurs réelles, exprimer $p_n(f)$ comme combinaison linéaire des fonctions $x \mapsto \cos(kx)$ et $x \mapsto \sin(kx)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, p_n(f)(x) = c_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Donner une expression intégrale des coefficients a_k et b_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

4. Donner pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in E_{2\pi}$ une expression simple de $\|p_n(f)\|_2^2$ en fonction des

coefficients c_k .

5. Montrer qu'il existe une constante $A \in \mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall f \in E_{2\pi}, \quad \|f\|_2 \leq A \|f\|_\infty.$$

6. On fixe $f \in E_{2\pi}$. En utilisant le théorème de Stone-Weierstrass trigonométrique, montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|p_{n_0}(f) - f\|_2 \leq \epsilon$.

7. En déduire que $p_n(f)$ converge vers f dans $E_{2\pi}$.

8. En déduire que $\|p_n(f)\|_2$ converge vers $\|f\|_2$. Donner une traduction en termes des coefficients c_k . C'est ce qu'on appelle l'égalité de Parseval.

Théorème de Stone-Weierstrass trigonométrique. Le sous-espace des polynômes trigonométriques est dense dans $E_{2\pi}$, c'est-à-dire que pour tout $f \in E_{2\pi}$ et tout $\epsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et des coefficients complexes $(c_{-n}, \dots, c_0, \dots, c_n)$ tels $\|f - \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}\|_\infty \leq \epsilon$.

V Séries de Fourier en pratique.

Exercice 12.

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(t) = 0$ si $t \in [0, \pi]$ et $f(t) = 1$ si $t \in]-\pi, 0[$. Montrer que les coefficients c_k associés à f sont donnés par $c_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall k \in \mathbb{Z}^*, c_k = \frac{(-1)^k - 1}{2i\pi k}$.

2. En utilisant la relation de Parseval, montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Appliquer à f le théorème de Dirichlet. Vérifier la cohérence avec la valeur de f en 0.

Exercice 13.

1. Montrer que

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.$$

2. Montrer de deux façons différentes qu'il y a convergence normale de la série de Fourier définie ci-dessus.

3. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 14. *D'après CCP 2002.*

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ on définit $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique telle que $\forall t \in [-\pi, \pi], f_\alpha(t) = \cos(\alpha t)$. Développer f_α en série de Fourier.
2. En déduire

$$\cotan(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

3. Soit $x \in]0, \alpha[$, on définit g sur $[0, x]$ par $g(t) = \cotan(t) - \frac{1}{t}$ si $t \in]0, x]$ et par $g(0) = 0$. Montrer que g est continue sur $[0, x]$.
4. Calculer $\int_0^x g(t)dt$.
5. Montrer $\forall t \in [0, x], g(t) = 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}$.
6. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$ converge normalement sur $[0, x]$.
7. En déduire que $\forall x > 0, \frac{\sin(x)}{x} = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2})$.
8. En déduire le développement Eulérien de $\sin(x)$:

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \sin(x) = x \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}).$$