Feuille 6 : Equations différentielles.

Master 2 Enseignement des Maths - Analyse 3

Guide

Avant de passer à autre chose, maîtriser les méthodes pour les équations linéaires scalaires d'ordre 1 et 2. Dans ce but, on travaillera d'abord les exercices 2, 4.1, 4.2, 3 (pour l'ordre 1) 6, 7, 9 et 10 (pour l'ordre 2).

On étudiera ensuite les équations différentielles linéaires à coefficients constants et d'ordre supérieur (15, 16, 17 et 18).

Etudier ensuite l'utilisation des séries entières avec l'exercices 13.

Enfin, on utilisera le théorème de Cauchy (exercice 19 en détails). On travaillera des méthodes classiques de résolution d'équations non linéaires sur des exemples au chapitre IV (changement de variable, équation à variables séparées, équation associée à une forme différentielle exacte) avec les exercices 21 et 22.

I Vocabulaire, se ramener à une équation différentielle d'ordre 1.

Vocabulaire

`Cours 1.` Il faut connaître les termes suivants que l'on rencontre dans le programme officiel. Donner pour chaucun d'eux une (ou plusieurs[1]) définitions et un exemple :
• système linéaire d'ordre 1,
• système à coefficients constants,
• système homogène à coefficients constants,
• équation linéaire scalaire,
• équation linéaire à coefficients constants,
• équation linéaire homogène à coefficients constants,
• équation non linéaire,
• équation homogène associée et
• équation à variables séparables.

On rencontre par ailleurs les termes suivant :
• équation différentielle d'ordre 1 sur une espace vectoriel E de dimension finie,
• équation différentielle scalaire d'ordre n,
• équation différentielle linéaire à coefficients constants,
• équation aux dérivées partielles[2]...

[1] Par exemple, pour certains auteurs une équation différentielle d'ordre n est de la forme $y^{(n)}+a_{(n-1)}(t)y^{(n-1)}+ ... + a_0y + b(t)$. Pour d'autres, elle sera de la forme $a_n(t)y^{(n)} + a_{(n-1)}(t)y^{(n-1)} + ... + a_0y + b(t)$, et si la fonction a_n s'annule, les choses seront bien différentes.

[2] Connaissez-vous l'équation des ondes et l'équation de la chaleur ?

`Cours 2.` Que veut dire *intégrer une équation différentielle* ? Que veut-on dire par *la résolution de l'équation différentielle se ramène à m quadratures ?*

`Cours 3.` Savoir définir une solution maximale[3] d'une équation différentielle.

`Cours 4.` Qu'est-ce qu'un problème de Cauchy ? Connaître trés précisément[4] les énoncés des théorèmes de Cauchy au programme. En particulier, savoir combien de théorèmes de Cauchy sont au programme, et quelles sont les différences.

Se ramener à une équation différentielle d'ordre 1.

`Cours 4.` Comment ramener un système différentiel d'ordre n à un système différentiel d'ordre 1 ? Quel est l'intérêt d'associer à des système d'ordre supérieur des systèmes d'ordre 1 ?

`Exercice 1.` Associer aux systèmes suivants des systèmes d'ordre 1.

$$\begin{array}{rrcl} \textbf{1.} & y^{(3)} & = & \sqrt{2 + y\sin(ty' + yy'')} \\ \textbf{2.} & y^{(3)} & = & 4y'' - 2y' + y \\ \textbf{3.} & y^{(3)} & = & ty'' - \sin(t)y' + 3y \end{array}$$

II Equations linéaires scalaires d'ordre 1 et 2.

Equations linéaires scalaires d'ordre 1

`Exercice 2.` *Equations linéaires scalaires d'ordre 1 homogènes.*
1. Soit $k \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + ky = 0$.
2. Soit $(k, t_0, y_0) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy $y' + ky = 0$ avec comme condition initiale $y(t_0) = y_0$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = 2xy$.
4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(1 + x^2)y' + xy = 0$.

`Exercice 3.` *Recollement de solutions.*
On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x^2y' = y$ (E) .
1. Etudier et tracer la fonction $x \mapsto e^{\frac{-1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Résoudre l'équation (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
3. Montrer que si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors $y(0) = 0$.
4. Montre que si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = Cy_0(x)$ où $C \in \mathbb{R}$ et y_0 est une fonction que l'on déterminera.
5. Conclure. (Mais que reste-t-il à faire au juste ?)
6. Peut-on appliquer le théorème de Cauchy pour avoir existence et unicité d'une solution sur

[3] Mais d'abord, comment se présente exactement le problème, et qu'est-ce en fait qu'une solution ?
[4] On remarquera que le théorème au programme pour les équations non linéaires est une forme plus faible que celle que l'on rencontre souvent dans les livres. La fonction f qui définit l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ est supposée $\mathcal{C}^1$ et pas localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable...

$\mathbb{R}$ prenant une valeur donnée en 0 ?

`Exercice 3.bis.` *Un autre recollement de solutions.*
Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(1-x)y' - y = x$.

`Exercice 4.` *Equations linéaires scalaires d'ordre 1 avec second membre.*
1. Utiliser la méthode de la variation de la constante pour trouver les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = 2xy + e^{x^2+1}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' - 3y = a$. On pourra reconnaître une solution évidente.
3. Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle $y' - \tan(x)y = 1$.

`Exercice 5.` Etudier les solutions de l'équation différentielle

$$(1-t^2)y' - ty = 1.$$

On pourra mener une étude sur trois intervalles.

Equations linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants

`Exercice 6.` *Equations à coefficients constants* Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

$$\begin{array}{rrcl} \textbf{1.} & y'' - 3y' + 2y & = & 0, \\ \textbf{2.} & y'' + y' + y & = & 0 \text{ et} \\ \textbf{3.} & y'' - 4y' + 4y & = & 0. \end{array}$$

`Exercice 7.` *Equations à coefficients constants avec conditions initiales.* Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes avec les conditions :
1. $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = \lambda$ et $y'(0) = \mu$.
2. $y'' + y = 0$, $y(0) = \lambda$ et $y'(0) = \mu$.
3. $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$ et $y(1) = 0$.
4. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$ et $y(\frac{\pi}{2}) = 0$. Comparer avec l'exemple précédent.

`Exercice 8.` *Equations à coefficients constants avec second membre : méthode générale de la variation de la constante.* [5]
On se propose de résoudre sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'équation

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\cos^2 x}. \qquad \text{(E)}$$

1. Ecrire puis résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $Y = (y, z)$ est solution d'une équation $Y' = AY + B$, où précisera la matrice A et la fonction numérique B.

[5] L'exercice est tiré des rappels de cours sur les équations différentielles rédigés par M. Deleglise. On peut consulter le document à cette adresse : http://math.univ-lyon1.fr/capes/IMG/pdf/equadiff.pdf .

3. Ecrire l'équation homogène associée au système $Y' = AY + B$. Déduire de **1** un système fondamental de solutions de cette équation homogène.
4. Appliquer la méthode générale de variations de la constante pour résoudre (E).

Equations linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients non constants

`Exercice 9.` *Cas homogène, déduire une deuxième solution d'une première.* On cherche les solutions sur $I =]-1, +\infty[$ de l'équation (E) : $(x+1)y'' - y' - xy = 0$.
1. Vérifier que la restriction de $x \mapsto e^x$ à I est solution de (E).
2. Chercher une autre solution de (E) sous la forme $y(x) = u(x)e^x$.

`Exercice 10.` *Résoudre le cas non homogène à partir d'une solution du système homogène associé.* On cherche les solutions sur $I =]-1, +\infty[$ de l'équation (E') : $(x+1)y'' - y' - xy = e^{-x}$.
1. Ecrire le système homogène associé et vérifier que la restriction de $x \mapsto e^x$ à I en est solution.
2. Résoudre (E') en cherchant des solutions sous la forme $y(x) = u(x)e^x$. On ne cherchera pas une base de l'équation homogène[6] associée à (E) !

`Exercice 11.` On cherche les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $(3+x^2)y'' + xy' - y = 1$.
1. Ecrire le système homogène associé (E').
2. On se propose de chercher les solutions de (E') qui soient des fonctions polynomiales. Déterminer le degré d'une telle fonction.
3. Déterminer les solutions polynomiales de (E').
4. Déterminer les solutions de (E').
5. Chercher une solution polynomiale de (E) . Résoudre (E).

`Exercice 12.` Résoudre sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 2$. On pourra chercher des solutions polynomiales.

Utilisation de développement en série entière.

`Exercice 13.` On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + xy' + y = 0$.
1. Supposons qu'une solution y de (E) soit développable en série entière sur l'intervalle $]-R, R[$ avec $R > 0$. Notons $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coefficients de ce développement, de sorte que pour $|x| < R$ on ait $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$. Prouver que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a :

$$c_{n+2} = -\frac{1}{n+2} c_n.$$

2. En déduire une expression de c_{2n} et de c_{2n+1} en fonction de n, c_0 et c_1.
3. Ecrire le développement en série entière de y si on suppose $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. On le note y_0. Ecrire de même le développement en série entière de y si on suppose $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. On le note y_1.
4. Calculer le rayon de convergence de chacune des séries définies à la question précédente.
5. Vérifier que y_0 et y_1 forment une base de l'espace des solutions de (E), et donner une expression simple de y_0.

[6] En fait cette recherche associée à une méthode de la variation de la constante aboutirait, mais la présentation serait plus longue.

`Exercice 14.` On considère l'équation différentielle (E) : $x^2(1-x)y''-x(1+x)y'+y=0$.
1. Calculer $y(0)$.
2. Supposons qu'une solution y_0 de (E) soit développable en série entière sur l'intervalle $]-R,R[$ avec $R>0$. Notons $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coefficients de ce développement, de sorte que pour $|x|<R$ on ait $y_0(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_nx^n$. Calculer les coefficients c_n.
3. Donner une expression simple de y_0.
4. En déduire une (droite de) solution de (E). On précisera les intervalles de validité.
5. Résoudre (E). On choisira avec précautions les intervalles. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

III Equations différentielles à coefficients constants.

`Cours 6.` Connaître les résultats concernant les équations différentielles à coefficients constants et sans second membre. Connaître le théorème donnant la forme des solutions d'une telle équation avec comme second membre une fonction polynôme exponentielle.[7]

`Exercice 15.` Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $y^{(4)} = y$ (on cherchera les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$) ,
2. $y^{(3)}+3y''+3y'+y = 0$ et
3. $y^{(4)}+2y''+y = 0$ (on cherchera à nouveau les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$).

`Exercice 16.` Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes. On précisera la forme d'une solution particulière avant de procéder par identification[8].

1. $y^{(4)} = y+t+e^{2t}$,
2. $y^{(3)}+3y''+3y'+y = (2+t)e^t$ et
3. $y^{(3)}+3y''+3y'+y = (2+t)e^{-t}$

Exponentielle d'un endomorphisme

`Cours 7.` On considère $p\in\mathbb{N}^*$.
1. Montrer qu'on définit une norme sur l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre p, noté $M_p(\mathbb{C})$, en posant pour $A\in M_p(\mathbb{C})$: $||A|| = p\times\max_{(i,j)\in[1,p]^2}|A_{i,j}|$.
2. Montrer que $||AB||\leq ||A||.||B||$ pour tout $(A,B)\in M_p(\mathbb{C})$. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in M_p(\mathbb{C})$ on a $||A^n||\leq ||A||^n$.
3. Soit $f : M_p(\mathbb{C})\times M_p(\mathbb{C})\to M_p(\mathbb{C})$ l'application définie par $f(A,B)=AB$. Montrer que f est continue.
4. Soit $A\in M_p(\mathbb{C})$. Montrer que la série $\sum_{k\geq 0}\frac{A^k}{k!}$ vérifie le critère de Cauchy, et qu'elle converge. On note e^A sa limite.

[7] C'était une question de cours de l'épreuve d'analyse du CAPES 2004.
[8] La méthode par identification est raisonable pour des polynômes de petits dégrés. Pour des polynômes de plus gand degré, on lui préfère la méthode du calcul symbolique (hors programme).

5. La série converge-t-elle vers la même limite pour toutes les normes de $M_p(\mathbb{C})$?
6. Soit $(A,B) \in (M_p(\mathbb{C}))^2$ tels que $AB = BA$. Montrer que $e^{A+B} = e^A.e^B$.
7. Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$ et $P \in GL_p(\mathbb{C})$. Montrer que $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^AP$.

En pratique

`Exercice 17.` *Toujours guidé...* Soit $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$. On cherche à résoudre le système différentiel $u' = u - 3v$, $v' = -3u + v$, $z' = -3u - 3v + 4w$ avec comme conditions initales $u(0) = u_0$ et $v(0) = v_0$.
1. Donner $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ telle que le système précédent s'écrive $Y' = AY$ avec $Y = (u, v, w)$.
2. Montrer que A est diagonalisable. On explicitera $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$ soit diagonale.
3. Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer $(tD)^n$.
4. Calculer e^{tD}.
5. Résoudre le problème proposé.

`Exercice 18.` *Exercice guidé.* Soit $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. On cherche à résoudre le système différentiel $u' = -5u + 4v$, $v' = -9u + 7v$ avec comme conditions initales $u(0) = u_0$ et $v(0) = v_0$.
1. Donner $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ telle que le système précédent s'écrive $Y' = AY$ avec $Y = (u, v)$.
2. Calculer les valeurs propres de la matrice A. Est-elle diagonalisable ?
3. En utilisant un vecteur propre de A que l'on complètera en une base de $\mathbb{R}^2$, expliciter $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $T = P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.
4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer $(tT)^n$.
5. Calculer e^{tT}.
6. Résoudre le problème proposé.

`Exercice 19.` Résoudre sur $\mathbb{R}$ les systèmes différentiels suivants, où les fonctions sont à valeurs réelles et où t est la variable :

$$\left\{\begin{array}{ccll} x' & = & 4x & -2y \\ y' & = & x & +y \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{cclll} x' & = & 2x & -y & +2z \\ y' & = & 10x & -5y & +7z \\ z' & = & 4x- & 2y & +2z \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} x' & = & & y \quad +t^2 \\ y' & = & x & \quad -t^2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x' & +x & +y & = & t^2 \\ y' & +y & +z & = & t \\ z' & +z & & = & 1 \end{array}\right.$$

IV Exemples d'études d'équations différentielles.

`Exercice 19.` *Changement de variable et équation à variables séparées.* On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y' = 2ty^2 \quad \text{(E)}$$

où l'inconnue y est à valeurs réelles.

1. Montrer que les solutions de (E) ne s'annulent jamais ou alors s'annulent sur leur intervalle de définition.

2. Soit y une solution de (E) définie sur un intervalle I et qui ne s'annule pas. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que tel que

$$\forall t \in I,\ y(t) = \frac{1}{C - t^2}.$$

On notera y_C cette solution. Pour y arriver, on pourra séparer les variables, c'est-à-dire ramener (E) à une équation de la forme $\frac{y'}{g(y)} = h(t)$, puis intégrer en la variable t.

3. Déterminer pour tout $C \in \mathbb{R}$ les variations de y_C sur son ensemble de définition. On pourra distinguer les cas $C < 0$, $C = 0$ et $C > 0$.

4. Constater sur cet exemple que pour tout $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique solution maximale de (E) qui vérifie $y(t_0) = y_0$. Pouvait-on le prévoir ? On représentera les solutions [9].

`Exercice 20.` *Changement de variable.* On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y' + y + xy^2 = 0 \quad \text{(E)}$$

où l'inconnue y est à valeurs réelles.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $z' - z = x$ où l'inconnue z est à valeurs réelles. Pour tout λ de $\mathbb{R}$ on note z_λ la solution qui vaut $\lambda - 1$ en 0.

2. Montrer que les solutions de (E) ne s'annulent jamais ou alors s'annulent sur leur intervalle de définition.

3. Soit y une solution de (E) qui ne s'annule jamais, et définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On pose $z = \frac{1}{y}$. Donner une équation linéaire du premier ordre vérifiée par z.

4. Etudier précisément les fonctions $y_\lambda = \frac{1}{z_\lambda}$ sur leurs ensembles de définition. Conclure et représenter les courbes intégrales.

Equation associée à une forme différentielle exacte.

`Exercice 21.` On considère l'équation

$$y^2 - x^2 + 2xyy' = 0 \quad \text{(E)}$$

où l'inconnue y est à valeurs réelles.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit (x_0, y_0) et (x, y) deux éléments de $\mathbb{R}^2$. En écrivant $f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0)$, exprimer $f(x,y)$ en fonction de $f(x_0,y_0)$, et d'intégrales des fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

2. Déterminer[10] une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - x^2 \ \text{ et } \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy.$$

[9] Faites le ! On en apprend vraiment beaucoup. De plus, aucun doute que le jour J de grands et beaux graphes en couleurs seront appréciés et récompensé.

[10] L'équation (E) est de la forme $a(x,y) + b(x,y)y' = 0$. Les fonctions a et b ont été choisies de façon à ce qu'il existe f vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x} = a(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = b(x,y)$. C'est en fait rarement le cas. Plus généralement, on cherchera une fonction λ telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda(x,y)a(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda(x,y)b(x,y)$. Un tel λ est appelé facteur intégrant.

3. Montrer que le graphe d'une fonction ϕ solution sur I de (E) est contenue dans une courbe d'équation implicite $g(x, y) = C$ où $C \in \mathbb{R}$.
4. Intégrer (E).
5. Représenter les solutions[11].

Equation homogène, changement de variable.

`Exercice 22.` *Changement de variable.* On considère l'équation

$$x + 2yy' - xy'^2 = 0 \quad \text{(E)}$$

où l'inconnue y est à valeurs réelles.
1. Montrer que si y est solution de (E) sur un intervalle I, alors pour tout k réel non nul la fonction $x \mapsto \frac{y(kx)}{k}$ est solution de (E) sur un intervalle J que l'on précisera. De même, montrer que $x \mapsto y(-x)$ est solution de (E) sur un autre intervalle que l'on précisera également.
2. Quelle propriété vérifie l'ensemble des courbes intégrales de (E) ?
3. Soit y une solution de (E) définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}_+^*$. On définit une fonction u sur I par $u(x) = \frac{y(x)}{x}$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par u.
4. On pose $v = u \circ \exp$ sur un intervalle convenable de sorte que $u(x) = v(t)$ avec $x = e^t$. Montrer que v vérifie l'équation différentielle

$$v'^2 = 1 + v^2 (E') \quad .$$

5. Rappeler la définition de la fonction $argsh$ et l'expression de sa dérivée (on supposera connue la fonction sh et ses variations).
6. Montrer que (E') est une équation à variables séparées, c'est-à-dire équivalente à une équation de la forme $v'(t)h(v(t)) = g(t)$. En intégrant, montrer que les solutions v de (E') vérifient

$$v(t) = \epsilon \sinh(t - t_0), \text{ avec } \epsilon \in \{1, -1\} \text{ et } t_0 \in \mathbb{R}.$$

7. En déduire que pour $x > 0$ les solutions de (E) sont de la forme

$$y(x) = \frac{C}{2}x^2 - \frac{1}{2C} \text{ avec } C \in \{e^{-t_0}, -e^{-t_0}\}.$$

8. Vérifier que ces solutions se prolongent à $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ il passe deux courbes intégrales, orthogonales entre elles, et qui sont des paraboles de foyer 0 et d'axe Oy. Représenter les courbes intégrales.

[11] A nouveau, consacrez à cette question tout le temps et l'attention qu'elle mérite !

2. Soit y une fonction de classe $C^2 \; : I \to \mathbb{R}$. Montrer que y est solution de (1.17) si et seulement si $Y = (y, y')$ est solution de $Y' = AY + B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^t}{\cos t} \end{pmatrix}$$

3. Expliciter un système fondamental de solutions du système homogène associé $Y' = AY$, puis appliquer la méthode générale de variation des constantes (cf. paragraphe 1.4), pour résoudre ce système.

Exercice 5 :

1. (a) Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions $x \mapsto c(x)$ et $x \mapsto s(x)$ définies sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\begin{cases} s'(x) &= c(x) \\ c'(x) &= -s(x) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} s(0) &= 0 \\ c(0) &= 1. \end{cases}$$

   (b) Montrer que $s^2(x) + c^2(x) = 1$, pour tout x.

   (c) Montrer que c est paire, et que s est impaire.

2. (a) Montrer que s et c sont de classe C^∞.

   (b) Expliciter $s^{(n)}(0)$ et $c^{(n)}(0)$ pour tout entier n.

   (c) Montrer en utilisant la formule de Taylor-Lagrange que $c(2) < 0$, et que, pour tout $x \in [0, 2]$ on a $s(x) \geq 0$.

   (d) Démontrer que c s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0, 2]$. On note π le double de l'unique racine de c sur $[0, 2]$, c'est à dire que π est l'unique réel de l'intervalle $[0, 4]$ tel que $c(\frac{\pi}{2}) = 0$.

3. (a) Montrer que s établit une bijection croissante de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$, et c une bijection décroissante de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$.

   (b) Démontrer les formules

$$\begin{array}{rclcrcl} s\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big) &=& c(x), && c\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big) &=& -s(x) \\ c(x + \pi) &=& -c(x), && s(x + \pi) &=& -s(x) \\ c(x + 2\pi) &=& c(x), && s(x + 2\pi) &=& s(x). \end{array}$$

4. (a) Montrer que si T est une période de c, alors c'est une période de s et réciproquement. Montrer que 2π est la plus petite des périodes de c (ou de s, puisque ce sont les mêmes).

5. Soit $S_1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 + y^2 = 1\big\}$. Montrer que l'application $\psi \; : [0, 2\pi[\to S_1,\ t \mapsto (c(t), s(t)$ est une bijection de $[0, 2\pi[$ sur S_1.

6. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange montrer que les fonctions c et s sont développables en séries entières de rayons de convergence infini, et que,

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad c(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

7. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant la fonction exponentielle définie sur l'algèbre $\mathrm{End}(R^2)$, des endomorphismes de R^2.