Feuille 1 : Révisions de géométrie affine et euclidienne.

Géométrie - M2 Enseignement Spécialité Mathématiques

Le prérequis pour aborder ce module comprend le contenu de l'unité d'enseignement de géométrie du M1, et en particulier les notions suivantes :
- espace affine, barycentre, applications affines (translations, homothéties, symétries),
- droites, plans (savoir jongler avec leurs équations) ; triangles, quadrilatères,
- espace euclidien, isométries, similitudes, angles,
- cercles, cocyclicité,
- utilisation des nombres complexes en géométrie.

Cette feuille a pour objectif de faire retravailler quelques exercices ou problèmes classiques liés à ces thèmes. (Mais le prérequis de ce module comprend également le module d'analyse du premier semestre de M1 !) Certains exercices sont tirés de documents de Stella Krell, d'autres inspirés des livres de géométrie de Gramain ou de Sortais.

I Triangles.

`Exercice 1.` *Tiré du premier sujet du Capes 2011*
Dans un plan affine euclidien orienté, on considère deux points distincts B et C, et un point M n'appartenant pas à la droite (BC).
Pour chacune des assertions suivantes, déterminer s'il existe un point A qui la vérifie. On précisera pour chaque cas le nombre de solutions et on prendra soin de fournir toutes les explications et justifications utiles.

1. M est le centre de gravité du triangle ABC.
2. M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
3. M est l'orthocentre du triangle ABC.

`Exercice 2.` *Théorèmes de Menelaüs et Ceva.*
1. Soit O_1 et O_2 deux points distincts du plan, et k_1, k_2 deux réels non nuls. On considère les deux homothéties h_1 et h_2 de centres respectifs O_1 et O_2, et de rapports respectifs k_1 et k_2. Monter que si $k_1k_2 \neq 1$ alors $h_1 \circ h_2$ est une homothétie, et que son centre est sur la droite (O_1O_2). On peut par exemple utiliser les applications linéaires associées, ou sinon utiliser les écritures complexes des transformations.
2. Que peut-on dire de $h_1 \circ h_2$ si $k_1k_2 = 1$?
On considère un triangle ABC, et trois point α, β et γ respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB), distincts des sommets du triangle.
On souhaite établir le **théorème de Menelaüs** [1], c'est-à-dire montrer que α, β et γ sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}.\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}.\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1.$$

[1] Menelaüs d'Alexandrie, mathématicien et astronome grec de la fin du Ier siècle.

3. On considère h_α l'homothétie de centre α qui transforme C en B, et h_β l'homothétie de centre β qui transforme A en C. On pose $h = h_\alpha \circ h_\beta$.
3.a. On suppose α, β et γ alignés. Montrer que h est une homothétie.
3.b. Montrer que le centre de h est sur (AB) et sur $(\alpha\beta)$.
3.c. En déduire une première implication.
3.d. Réciproquement, supposons que $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}.\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}.\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1$. Considérons h_γ l'homothétie de centre γ qui transforme B en A. Quelle est la nature de $h_\gamma \circ h_\alpha \circ h_\beta$?
3.e. Conclure.
On souhaite maintenant montrer le **théorème de Ceva** [2] , soit montrer que $(A\alpha)$, $(B\beta)$ et $(C\gamma)$ sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}.\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}.\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -1.$$

4.a. Supposons $(A\alpha)$, $(B\beta)$ et $(C\gamma)$ parallèles. Démontrer que $\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B\alpha}}$, et que $\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = \frac{\overline{C\alpha}}{\overline{CB}}$ puis conclure.
4.b. Supposons $(A\alpha)$, $(B\beta)$ et $(C\gamma)$ concourantes en un point H. Appliquer le théorème de Menelaus dans le triangle $AB\alpha$ avec la sécante $(C\gamma)$ puis dans le triangle $A\alpha C$ avec la sécante $(B\beta)$. Conclure.
4.c. * Démontrer la réciproque.
5. On suppose en plus pour cette question que $\alpha \in [BC]$, $\beta \in [AC]$ et $\gamma \in [AB]$. Montrer que $(A\alpha)$, $(B\beta)$ et $(C\gamma)$ sont concourantes si et seulement si

$$\frac{\sin\left(\widehat{BA\alpha}\right)}{\sin\left(\widehat{CA\alpha}\right)}.\frac{\sin\left(\widehat{AC\gamma}\right)}{\sin\left(\widehat{BC\gamma}\right)}.\frac{\sin\left(\widehat{CB\beta}\right)}{\sin\left(\widehat{AB\beta}\right)} = 1.$$

6. Mais... nous sommes peut-être allés un peu vite en rédigeant l'énoncé. Il faudrait préciser de quelle(s) structure(s) est muni le plan auquel appartiennent les points A, B et C...
7. A l'aide du théorème de Ceva, redémontrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.

II Puissance d'un point par rapport à un cercle.

`Exercice 3.` *Les 7 premières questions sont tirées du deuxième sujet du Capes 2005*
Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien, Γ un cercle de $\mathcal{P}$, de centre Ω, de rayon $R > 0$. Soit M un point de $\mathcal{P}$, et soit D une droite passant par M et coupant Γ en deux points T_1 et T_2. On pose $p_{[D,\Gamma]}(M) = \overline{MT_1}.\overline{MT_2}$.

1. Montrer que $p_{[D,\Gamma]}(M) = \Omega M^2 - R^2$, et donc que $p_{[D,\Gamma]}(M)$ ne dépend pas de la droite sécante D. (On pourra, introduire le point H, projeté orthogonal de Ω sur D). Dans cette situation, on pose $p_\Gamma(M) = p_{[D,\Gamma]}(M)$ (quelle que soit la droite D passant par M et coupant Γ en deux points) et on appelle cette quantité $p_\Gamma(M)$ la puissance du point M par rapport au cercle Γ.
2. Quel rapport y a-t-il entre le signe de la puissance d'un point M par rapport à un cercle Γ et sa position dans le plan ?
3. Quelle est la puissance du centre d'un cercle par rapport à ce cercle ?

[2] Giovanni Ceva (1647-1734), géomètre italien

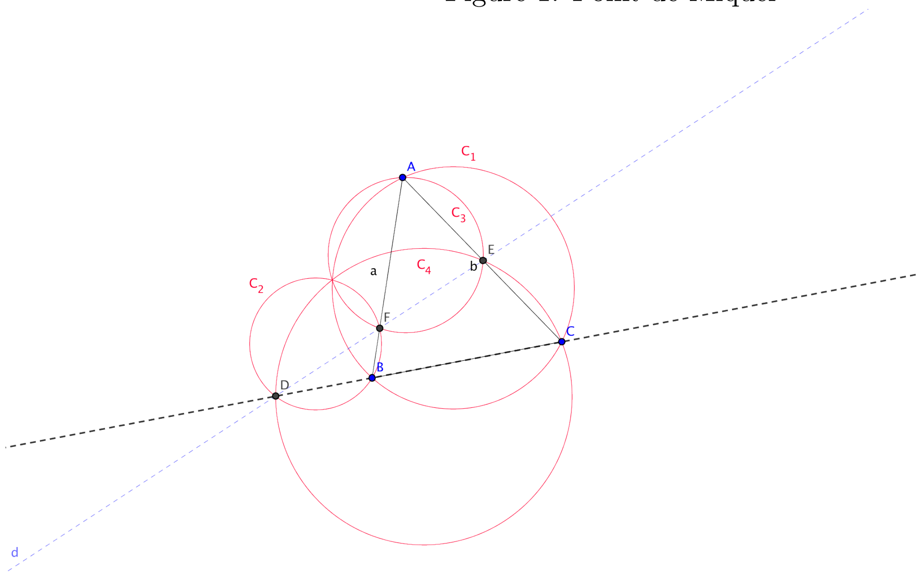
4. Soit Γ un cercle et soit D_0 une droite passant par M et tangente au cercle Γ en un point T. Que peut-on dire du point M si une telle droite D_0 existe ? D_0 est-elle unique ? Montrer que $p_\Gamma(M) = MT^2$.
5. Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles sécants en deux points A et B. Montrer que la droite (AB) est exactement l'ensemble de tous les points M du plan qui vérifient la relation $p_{\Gamma_1}(M) = p_{\Gamma_2}(M)$.
6. Determiner la nature de l'ensemble des points qui ont la même puissance par rapport à deux cercles lorsque ceux-ci ne sont pas forcément sécants. Que peut-on en dire si les deux cercles sont tangents ?
7. $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit Γ un cercle dont l'équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$ est $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Déterminer la puissance du point O (origine du repère) par rapport à ce cercle.
8. Si Γ_1 et Γ_2 sont deux cercles non concentriques de $\mathcal{P}$, on appelle axe radical de Γ_1 et Γ_2 la droite définie aux questions **5** et **6**. Considérons alors trois cercles de centres non alignés : montrer que les trois axes radicaux qu'ils définissent sont concourants.
9. En déduire une méthode pour construire l'axe radical de deux cercles non sécants.

`Exercice 4.` **Suite : Orthocentre et cercle circonscrit.** Soit ABC un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. La hauteur issue de A rencontre (BC) en P et $\mathcal{C}$ en A_1 (et A). On désigne par H le symétrique de A_1 par rapport à P.
1. Montrer que $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BP}.\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PH}.\overrightarrow{AP}$.
2. En déduire, à l'aide de l'exercice précédent que $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$
3. Que représente le point H pour ABC ?
4. Quelle propriété remarquable a-t-on démontrée ?

III Encore des cercles !

`Exercice 5.` **Point et cercle de Miquel.**
Dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ on considère un triangle ABC. Soit d une transversale de ce triangle, c'est-à-dire une droite coupant (BC), (CA) et (AB) en des points respectifs D, E et F, distincts des sommets A, B et C du triangle. On considère les quatre cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ circonscrits aux triangles ABC, DBF, AEF et DCE. On se propose dans un premier temps de montrer que ces quatre cercles sont coucourants en un point qu'on appellera point de Miquel.
1. Montrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont exactement deux points en commun, et que l'un de ces deux points est B. On notera K l'autre point.
2. Montrer que $K \in \mathcal{C}_3$ et que $K \in \mathcal{C}_4$. *On pourra utiliser la caractérisation de la cocyclicité en termes d'angles.* Conclure.
3. On note Ω_1, Ω_2, Ω_3 et Ω_4 les centres respectifs des cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$. Montrer que $\Omega_1 \neq \Omega_2$, puis que $(\Omega_3\Omega_2)$ est la médiatrice du segment $[KF]$.
4. Montrer que Ω_1, Ω_2, Ω_3 et Ω_4 appartiennent à un même cercle. On l'appelle cercle de Miquel.

Figure 1: Point de Miquel



Exercice 6 Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, et de diamètre AA'. On note D (resp D') la médiatrice de OA (resp OA'), et on prend M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et A'. La médiatrice de OM coupe D et D' en deux points notés respectivement P et P'. Les droites AP et $A'P'$ se coupent en un point noté I.

1. Que peut-on dire de la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{OP}\right)$?

2. Montrer que le point I est sur $\mathcal{C}$.

3. Montrer que les points O, M, P, P', I sont cocycliques.

4. Montrer que les points M et I sont symétriques par rapport à la médiatrice de AA'.

IV Droites, plans, nombres complexes.

`Exercice 7.` Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ on se donne les points $A(1,2,-1)$, $B(3,2,0)$, $C(2,1,-1)$, $D(1,0,4)$ et $O(0,0,0)$. Déterminer l'intersection des plans (OAB) et (OCD).

`Exercice 8.` Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ on considère la droite D d'équation $\begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$ et la droite D' d'équation $\begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$. Vérifier que D et D' ne sont pas parallèles, puis déterminer a et b pour qu'elles soient sécantes. Former alors une équation cartésienne du plan qu'elles déterminent.

`Exercice 9.` **Du cours !** Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé, et identifié à $\mathbb{C}$. On considère quatre points A, B, C et D deux à deux distincts et d'affixes respectives a, b, c et d.

1. Montrer que A, B et C sont alignés si et seulement si $(b-a)\overline{(c-a)} \in \mathbb{R}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante du même type pour que (AB) et (CD) soient orthogonales.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les affixes pour qu'un point M de $\mathcal{P}$ d'affixe z appartienne à (AB).
4. Soit $R > 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les affixes pour qu'un point M de $\mathcal{P}$ d'affixe z appartienne au cercle de centre A et de rayon R.

V Problèmes de lieux.

Dans toute cette partie, on considère un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, et ainsi identifié à $\mathbb{R}^2$.

`Exercice 10.` Soit un carré $ABCD$. Deux points M et N parcourent respectivement les segments $[AB]$ et $[AD]$, avec la condition $AN = BM$. On note I le milieu I du segment MN. Quel est le lieu du point I ? On pourra utiliser une transformation bien choisie ou les coordonnées.

`Exercice 11.` Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. On considère deux points variables P et Q, tels que P ait pour abscisses a, Q ait pour ordonnée b, et tels que (OP) et (OQ) soient orthogonales. L'objectif de l'exercice est de déterminer le lieu de la projection orthogonale M de O sur la droite (PQ).
1. Soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $C \in \mathbb{R}$. Calculer les coordonnées de la projection orthogonale de O sur la droite d'équation $Ax + By + C = 0$.
2. Réaliser la construction demandée à l'aide du logiciel Geogebra. Emettre une conjecture quant au lieu cherché.
3. En introduisant un paramètre $t \in \mathbb{R}$ correspondant à l'ordonnée de P, calculer les coordonnées du seul point Q correspondant, puis du point M.
4. Conclure.

`Exercice 12.` Soit $R > 0$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre 0 et de rayon R. Un cercle variable Γ a pour centre un point Ω de coordonnées (R,λ), est tangent à (yy'), et coupe $\mathcal{C}$ en deux points. On cherche le le lieu du milieu I du segment joignant ces deux points d'intersection.
1. Réaliser la construction demandée à l'aide du logiciel Geogebra.
2. Résoudre le problème. On pourra raisonner par analyse et synthèse.