Feuille 3 : Coniques.

Géométrie - M2 Enseignement Spécialité Mathématiques

Certains exercices sont tirés de documents de Stella Krell, d'autres inspirés des livres de Jean-Marie Monier (Exercices de Géométrie chez Dunod) ou du livre *Exercices de musculation en Mathématiques* de Michel Miternique (chez Ellipse).

Dans toute la feuille, on considère un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, et ainsi identifié à $\mathbb{R}^2$.

I Eléments caractéristiques d'une conique.

`Exercice 1.`
Avant de la tracer, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la conique d'équation :

1. $4x^2 - 9y^2 + 8x + 54y - 113 = 0$,
2. $16x^2 + 9y^2 + 32x - 54y - 47 = 0$,
3. $9y^2 - x^2 - 2ax - a^2 = 36$,
4. $16x^2 - 25y^2 + 96x - 256 = 0$,
5. $9x^2 + 4y^2 + 18x - 27 = 0$,
6. $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0.$.

`Exercice 2.` Avant de la tracer, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la conique d'équation $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$. On pourra dans ce but écrire son équation cartésienne dans le repère $\left(\Omega, \vec{I}, \vec{J},\right)$ où Ω a pour coordonnées $(0,1)$ et $\vec{I} = \frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}$, $\vec{J} = \frac{-\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}$.

`Exercice 3.` Identifier les courbes d'équation polaire :

1. $\rho(\theta) = \frac{1}{1-2\cos(\theta)}$, puis
2. $\rho(\theta) = \frac{1}{2+\cos(\theta)}$,
1. $\rho(\theta) = \frac{1}{1-\sin(\theta)}$, et
2. $\rho(\theta) = \frac{1}{2+\sin(\theta)}$.

`Exercice 4.` Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, et $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Déterminer l'équation des asymptotes à $\mathcal{H}$.

`Exercice 5.` Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, et $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Montrer que la tangente à $\mathcal{E}$ en un point (x_0, y_0) de $\mathcal{E}$ admet pour équation cartésienne

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1.$$

`Exercice 6.` On dit qu'une hyperbole est équilatère si ses asymptotes sont perpendiculaires. Déterminer l'excentricité d'une hyperbole équilatère.

II Quelques propriétés des coniques.

`Exercice 7.` Donner pour chacun des types de coniques un exemple d'apparition dans la nature.

`Exercice 8.` Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de grand axe AA'. Pour tout $M \in \mathcal{E}$ distinct de A et de A', la tangente en M à $\mathcal{E}$ coupe les tangentes en A et A' en P et P' respectivement. Montrer que $\overline{AP}.\overline{A'P'}$ est constant. On pourra par exemple introduire une paramétrisation classique de l'ellipse...

`Exercice 9.` Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole équilatère de centre O, et P et Q deux points de $\mathcal{H}$ symétriques par rapport à O. Montrer que le cercle de centre P et de rayon PQ recoupe $\mathcal{H}$ en trois points sommets d'un triangle équilatéral de centre O.

`Exercice 10.` A quelles conditions sur $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ est-elle une hyperbole ?

`Exercice 11.` Soit $\mathcal{P}$ une parabole. Une droite variable D passe par le foyer et coupe la parabole en deux points M_1 et M_2. Montrer que le cercle de diamètre M_1M_2 est tangent à la directrice, et déterminer le lieu du centre de ce cercle. On pourra introduire θ, l'angle entre la corde et l'axe focal.

`Exercice 12.` On souhaite étudier $\mathcal{L}$ l'ensemble des centres des cercles tangents à la droite (Oy) et au cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$.
1. Proposer deux symétries qui laissent $\mathcal{L}$ invariant.
2. Montrer que $\mathcal{L}$ est la réunion de deux coniques dont on précisera les éléments caractéristiques.

III Problème.

Problème 1 : problème de l'examen final de l'année 2012-2013

Soit $p > 0$. On considère une parabole Γ d'équation cartésienne $y^2 = 2px$ dans le plan $\mathcal{P}$. On notera F son foyer.

1. Soit $M_0 \in \Gamma$ de coordonnées (x_0, y_0). Redémontrer que la tangente à Γ en M_0 a pour équation cartésienne $y_0y = p(x_0 + x)$.

2. On considère un point $M \in \Gamma$ distinct de l'origine O et $\mathcal{D}$ la tangente à Γ en M. On

note N le projeté orthogonal de M sur l'axe (Oy) des ordonnées, K le projeté orthogonal de M sur la directrice de Γ, et L le point de concours des droites $\mathcal{D}$ et (Oy).
2.a. Que peut-on dire du triangle KMF ?
2.b. Montrer que L est le milieu de $[ON]$. *On pourra introduire les coordonnées* (x_M, y_M) *de* M. Que peut-on dire de $KNFO$?
2.c. Montrer que $\mathcal{D}$ est une bissectrice des droites (MF) et (MK).

3. Soit A, B et C trois points distincts de Γ d'ordonnées respectives a, b et c. Après avoir calculé les abscisses de ces points, montrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si

$$a^2 + ac + ab + bc + 4p^2 \;=\; 0.$$

4. Dans cette question et dans la suivante, on fixe un point A sur Γ. Les points B et C, distincts de A, varient sur Γ de façon telle que les droites (AB) et (AC) soient perpendiculaires. Montrer qu'une telle droite (BC) a pour équation cartésienne :

$$(y+a)b^2 + (-2px + a^2 + 4p^2)b - 2apx - a^2y - 4p^2y \;=\; 0.$$

5. On considère la même configuration que dans la question précédente. Montrer que pour A fixé, les droites (BC) ont un unique point commun. En déterminer les coordonnées en fonction de a. On notera M_A ce point.

6. Déterminer le lieu $\mathcal{L}$ des points M_A lorsque A décrit Γ. Préciser rapidement les éléments caractéristiques de $\mathcal{L}$, et représenter sur une même figure Γ et $\mathcal{L}$.