Feuille 2 : Intégration.

M2 Enseignement Mathématiques - Analyse pour l'oral et l'enseignement

I Connaissances attendues

• Connaître les programmes des classes de Première, Terminale et BTS en relation.
• Connaître les définitions donnés en Terminale. Connaître la structure du cours (en particulier, le lien entre dérivation et intégrale).
• Connaître une définition de l'intégrale donnée en classe de Mathématiques supérieures. Quel est le cadre ?
• Dans le cadre de la Terminale S, savoir démontrer le théorème fondamental de l'analyse (lien intégrale -dérivée) dans le cadre du programme. Connaître une démonstration dans un cadre un peu plus général accessible en première année du supérieur. (cf. exercice **1.**)
• Savoir construire un exercice amenant à calculer une intégrale à l'aide du calcul d'aire.
• Connaître les démonstrations des propriétés de l'intégrale dans le cadre du programme de Terminale S.
• Connaître et savoir expliquer proprement les méthodes des rectangles à gauche, à droite et des trapèzes. Dans chacun des cas savoir donner un algorithme.

II Pour travailler les définitions de l'intégrale et les théorèmes de TS

`Exercice 1.` *Définitions de l'intégrale - Théorème fondamental de l'analyse.*
1. Donner la définition de l'intégrale donnée dans les classes de Terminale.
2. Pour une classe, le programme demande de définir pour une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ comme la différence $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a,b]$. Quel(s) résultat(s) faudrait-il vérifier avant d'établir cette définition ?
3. Avec la définition de l'intégrale donnée en Terminale S, démontrer le théorème fondamental de l'analyse en restant dans le cadre du programme de Terminale S.
4. Avec la définition de l'intégrale donnée en Terminale S, démontrer le théorème fondamental de l'analyse dans un cadre un peu plus général : on supposera que la fonction intégrée est continue, et on se ramènera à la définition du nombre dérivée puis à la définition de la limite en termes de *epsilon*.
6. Donner une définition de l'intégrale au programme de la classe de Mathématiques supérieures.

`Exercice 2.` Proposer un exercice destiné à une classe de Terminale S amenant à calculer pour $R > 0$ l'intégrale $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}dx$, à l'aide de la définition en termes d'aire.

`Exercice 3.` En classe de Terminale ES, par quel type d'exemple les notions d'aires et de moyennes doivent-elles être illustrées ? Proposer un exemple d'exercice

`Exercice 4.` Dans un cours de Terminale S, dans le chapitre sur le *Calcul de l'intégral d'une* *fonction continue*, on trouve la définition suivante :

> **Définition et Propriété**
> Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux nombres réels de cet intervalle et F une primitive de f sur cet intervalle.
> L'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ est le nombre $F(b) - F(a)$, noté $\int_a^b f(x)dx$.

1. Quelles ambiguïtés peut-on relever dans le passage ci-dessus ?
2. Lever ces ambiguïtés.

III Savoir utiliser un algorithme pour encadrer une intégrale

`Exercice 5.` *Méthode des rectangles.*
On considère deux réels a et b tels que $a < b$, ainsi qu'une fonction réelle f croissante et continue sur $[a, b]$.
1. Donner un encadrement très simple de $\int_a^b f(x)dx$ en fonction des valeurs de f en a et b.
2. Donner une interprétation graphique de l'encadrement obtenu en **1.** dans le cas où f est positive.
3. Pour tout $n \geq 1$ on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles on encadre l'intégrale de la fonction f à l'aide de la méthode décrite ci-dessus. Faire une figure et établir un encadrement $\int_a^b f(t)dt$ en fonction de sommes de valeurs prises par f.
4. Pour tout $n \geq 1$, on note S_n et s_n les approximations par excès et par défaut obtenues en **3.** . Donner une majoration de $|S_n - s_n|$ en fonction d'un majorant M de f.
5. En déduire un algorithme renvoyant, dans le contexte de l'exercice, une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction, à une précision donnée. L'algorithme prendra en entrée la précision.
6. Implémenter l'algorithme.
7. Quels exemples choisir pour tester l'algorithme et pourquoi ?

`Exercice 6.` *Méthode des trapèzes.* On considère deux réels a et b tels que $a < b$, ainsi qu'une fonction $f \in \mathcal{C}\big([a, b], \mathbb{R}\big)$. On propose une méthode numérique pour donner une approximation I de $\int_a^b f(x)dx$. En particulier, on essaie de majorer en valeur absolue l'erreur commise $\epsilon = \int_a^b f(x)dx - I$.
1. Donner l'expression de la fonction affine ϕ interpolant f en a et en b. Faire une figure dans le cas d'une fonction f positive.
2. En utilisant cette approximation de la fonction f, donner une approximation I de $\int_a^b f(x)dx$.
3. Pour évaluer l'erreur $\epsilon = \int_a^b f(x)dx - I$ on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, et on note M la borne supérieure de $|f''|$ sur cet intervalle. Montrer que

$$\int_a^b (t-a)(t-b)f''(t)dt \;=\; (a-b)\big(f(b) + f(a)\big) + 2\int_a^b f(t)dt$$

4. En déduire que

$$|\epsilon| \;\leq \frac{(b-a)^3}{12} M.$$

6. Pour tout $n \geq 1$ on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles on approche l'intégrale de la fonction f à l'aide de la méthode décrite ci-dessus. Faire une figure et en déduire une approximation I_n de $\int_a^b f(t)dt$.

7. En déduire l'encadrement de l'erreur $\epsilon_n = I_n - \int_a^b f(t)dt$ suivant

$$|\epsilon_n| \ \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M.$$

8. *Application numérique.* Proposer une valeur approchée à 10^{-4} près de $\int_0^2 e^{-x^2} dx$.

Thème : calcul intégral

L'exercice

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x(1-x^2)$.
On note (C)la courbe représentative de f dans le plan muni d 'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On note $(\mathcal{D})$ l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que : $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant x(1-x^2)$.

1) Calculer l'aire du domaine $(\mathcal{D})$.
2) Existe-t-il une droite (Δ) passant par l'origine et partageant le domaine $(\mathcal{D})$ en deux parties de même aire.

Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

La réponse d'un élève à la question 2)

On veut couper la partie en deux parties de même aire donc $\frac{1}{8}$. *Une droite qui passe par l'origine a pour équation* $y = ax$.
Je cherche le point M *d'intersection avec la courbe :*

$$x(1-x^2) = ax$$
$$1-x^2 = a$$
$$x^2 = 1-a$$
$$x = \sqrt{1-a}$$
$$M\left(\sqrt{1-a}, a\sqrt{1-a}\right)$$

L'aire entre la courbe et la droite doit être égale à $\frac{1}{8}$ *donc :*

$$\int_0^{\sqrt{1-a}} x(1-x^2)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\sqrt{1-a}} ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}$$

c'est trop compliqué, j'arrête.
Je vois que l'aire entre la courbe et la droite vaut 0 *quand* M *est en* O *et vaut* $\frac{1}{4}$ *quand* M *est en* $I(1;0)$ *donc forcément elle vaut* $\frac{1}{8}$ *à un moment.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de l'élève. Quels sont selon vous ses acquis ? Sa démarche vous paraît-elle pertinente et quelles erreurs avez-vous repérées ?

2- En vous appuyant sur la démarche de l'élève, proposez une correction de la question 2) telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3- Présentez plusieurs exercices illustrant le thème *intégration*