LICENCE DE MATHEMATIQUES - L7 GEOMETRIE

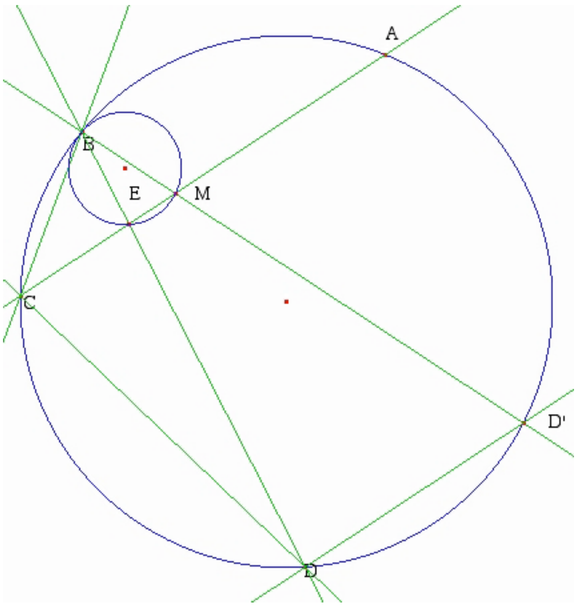
Activité N°5 - Cercles.

On travaille dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$.

I Premiers exercices.

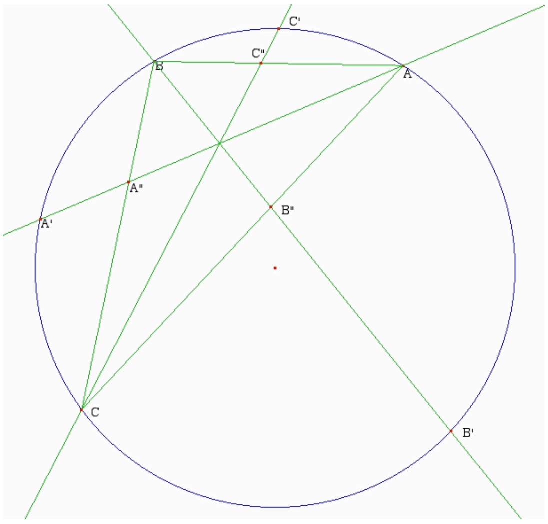
Exercice 1 Soient C_1 et C_2 deux cercles. Quelles rotations transforment C_1 en C_2 ? Quelles homothéties transforment C_1 en C_2 ? Comment en construire les centres ?

Exercice 2 Soit $\mathcal{C}$ un cercle, A, B, C et D quatre de ses points (dans cet ordre). Les droites AC et BD se coupent en E. On note M l'unique point du segment $[CE]$ tel que $(CB, BM) = (DC, CA)$.



On souhaite montrer que le cercle circonscrit à BME est tangent en B à $\mathcal{C}$. On introduit D', point de concours entre BM et $\mathcal{C}$. Montrer que BEM et BDD' sont homothétiques, par une homothétie h de centre B. Conclure.

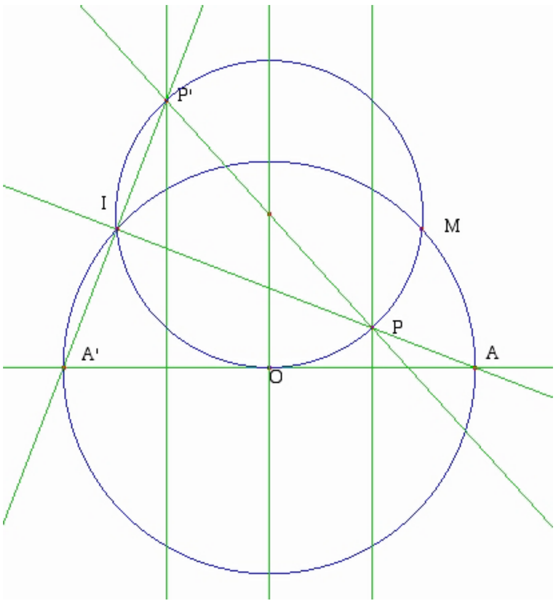
Exercice 3. Soit ABC un triangle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$. On note a b et c les longueurs BC, CA et AB. La bissectrice intérieure issue de A (resp B, C) coupe $\mathcal{C}$ en A' (resp B', C'), et le segment BC (resp AC, AB) en A'' (resp B'', C''.



On note $a'' = AA''$, $b'' = BB''$, $c'' = CC''$, et : $a' = AA'$, $b' = BB'$, $c' = CC'$. Montrer que :

$$(abc)^2 = (a'b'c')(a''b''c'')$$

(On pourra étudier les liens entre les triangles ABA'' et $AA'C$ par exemple.)
Exercice 4. Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, et de diamètre AA'. On note D (resp D') la médiatrice de OA (resp OA'), et on prend M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et A' La médiatrice de OM coupe D et D' en deux points notés respectivement P et P'. Les droites AP et $A'P'$ se coupent en un point noté I.



Montrer que
a) le point I est sur $\mathcal{C}$
b) O, M, P, P', I sont cocycliques
c) M et I sont symétriques par rapport à la médiatrice de AA'.

II Puissance d'un point par rapport à un cercle.

Exercice 5 Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles de centres I_1 et I_2 disctincts, H le point de l'axe radical situé sur I_1I_2. Démontrer que, pour tout point M du plan, on a :

$$\mathcal{C}_2(M) - \mathcal{C}_2(M) = 2\,\overrightarrow{I_2I_1}\,.\,\overrightarrow{HM} \tag{1}$$

Exercice 6 : Quadrilatère complet. Soient A B et C trois points non alignés. Une droite $\mathcal{D}$ coupe BC, CA et AB en D, E et F. On parle du quadrilatère complet formé par les droites ABF, BCD, CAE et DEF ; les 6 points A B C D E et F en sont les sommets. Les droites AD BE et CF en sont les diagonales. On note A', B' et C' les pieds des hauteurs dans ABC issues de A B et C.

a) Démontrer la relation $\overrightarrow{HA}\,.\,\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HB}\,.\,\overrightarrow{HB'}$

b) Démontrer que H a la meme puissance par rapport aux trois cercles dont les diamètres sont les diagonales AD, BE et CF.

c) Démontrer que les orthocentres des quatres triangles ABC, BDF, CDE et AEF sont alignés sur une droite Δ. Que représente Δ ? Montrer que les milieux des trois diagonales sont alignés sur une droite perpendiculaire à Δ.

Exercice 7

a) Soient A, B et C trois points non alignés. Les bissectrices de (AB, AC) recoupent BC en D et D'. Montrer que

$$\frac{DC}{DB} = \frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$$

b) Le lieu des points M du plan dont le rapport des distances à deux points B et C est une constante donnée $k > 0$ est un cercle C_k, dont on précisera les points d'intersection avec BC. Montrer que la famille $(C_k)_{k>0}$ est un pinceau de cercles. c) Le lieu des points M du plan d'où l'on voit BC sous un angle donné α (i.e : $(MB, MC) = \alpha$) est un cercle Γ_α. Montrer que la famille $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est un pinceau.

III Un peu de topologie : recouvrement du plan par des cercles.

On se propose de montrer que le plan ne peut etre recouvert par une famille de cercles disjoints. Supposons l'existence d'une telle famille : $(C_i)_{i\in I}$. On note pour tout i r_i le rayon du cerlce C_i, et D_i le disque de bord C_i. a) Montrer qu'un cercle est connexe, et qu'un disque est fermé. b) Montrer que si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux cercles disjoints, si $\mathcal{C}'$ a un point à l'intérieur de $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{C}'$ est entièrement contenu à l'intèrieur de $\mathcal{C}$. c) Construire une suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telle que $D_{i_{n+1}} \subset D_{i_n}$ et $r_{i_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2} r_{i_n}$ pour tout n. d) Que dire de $\cap_{n\in\mathbb{N}} D_{i_n}$ (et en général, d'une telle intersection de fermés dans un espace complet ? Quelles hypothèses faut il rajouter ? cf. cours de topologie !)

e) Conclure.