LICENCE DE MATHEMATIQUES - L7 GEOMETRIE
Activité N°6 - Division harmonique.

I Encore des cercles...

Exercice 1 : Centre radical de trois cercles.
Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ trois cercles de centres Ω, Ω' et Ω'' non alignés.
1) Montrer que les axes radicaux des trois couples de cercles concourent eu un point. On appellera ce point le centre radical des trois cercles.
2) On suppose les cercles deux à deux orthogonaux : montrer que le centre radical est l 'orthocentre de $\Omega\Omega'\Omega''$.

Exercice 2
Soit $\mathcal{F}$ un pinceau de cercles. Par quels points du plan passe-t-il un cercle de $\mathcal{F}$? Comment construire les cercles en question ?

II Premiers exercices sur le birapport, les homographies...

Exercice 3
Soient P et Q deux points distincts du plan, tels que la droite $< PQ >$ ne passe pas par l'origine. Pour tout α de $\mathbb{R}$ on note $M(\alpha)$ l'unique point tel que $O\vec{M}(\alpha) = (1-\alpha)O\vec{P} + \alpha O\vec{Q}$. Calculer les coordonnées du point $P(\alpha)$ d'intersection de la droite $OM(\alpha)$ et de la droite D d'équation $y = 1$. Quel résultat retrouve-t-on ?

Exercice 4
Soient x, x', y et y' 4 points de la droite projective. Démontrer l'équivalence entre les deux égalités :

a) $(\infty, 0, x, x') = (\infty, 0, y, y')$
b) $(\infty, 0, x, y) = (\infty, 0, x', y')$

Exercice 5
Soient f et g deux homographies de la droite projective ayant chacune deux points fixes. Montrer que f et g commutent si et seulement si elles ont memes points fixes.

III Division harmonique.

A Points en division harmonique.

On dit que 4 points distincts A, B, C et D d'une droite projective forment **une division harmonique** si leur birapport (A, B, C, D) vaut -1.

1) L'ordre des points est-il important ?
2) On décide de faire une étude en distinguant deux cas :
- A, B, C et D sur une meme droite affine
- A, B et C sur une meme droite affine, et $D = \infty$. Pourquoi étudier ces deux cas ?

3) Premier cas : A, B, C et D sont sur une meme droite affine Δ. Dans un repère affine de Δ, les points ont pour affixe a, b, c et d. I désigne le milieu du segment AB. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

a) (A, B, C, D) est une division harmonique.

b) $(a + b)(c + d) = 2(ab + cd)$

c) $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$

d) $IA^2 = IB^2 = \vec{IC}.\vec{ID}$

e) $\vec{CA}.\vec{CB} = \vec{CD}.\vec{CI}$

4) Deuxième cas : A, B et C sont sur une meme droite affine Δ. Montrer que la division (A, B, C, ∞) est harmoniqe si et seulement si C est le milieu du segment AB.

B Droites en faisceau harmonique.

Dans un plan projectif, on dit que 4 droites D_1, D_2, D_3 et D_4 issues d'un point I forment **un faisceau harmonique** si le birapport (D_1, D_2, D_3, D_4) vaut -1.

1) Quel est le lien avec la notion de points d'une droite projective formant une division harmonique ?
2) Soit alors D_1, D_2, D_3 et D_4 dans un plan euclidien. Montrer que (D_1, D_2, D_3, D_4) est harmonique si et seulement si D_3 et D_4 sont les bissectrices du couple de droites D_1, D_2.
3) Dans le plan affine, soit A, B et C trois points non alignés, M le milieu de BC et $\mathcal{D}$ la parallèle à BC issue de A. Montrer que AB, AC, AM et $\mathcal{D}$ forment un faisceau harmonique.