Ln2 -TD 8 : Espaces préhilbertiens - Séries de Fourier

Exercice 1 - Un produit scalaire défini sur un espace de matrices.

Pour A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ on définit :

$$< A, B >= Tr({}^tAB)$$

1) Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ Quelle est la norme associée ?

2) Pourquoi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il en fait un espace de Hilbert ?

3) Décrire simplement l'orthogonal de la droite $\mathbb{R}.I_n$, où I_n désigne la matrice identité.

4) Montrer que les sous espaces vectoriels $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ (des matrices symétriques et anti-symétriques) sont orthogonaux. Calculer la projection orthogonale sur ces deux sous espaces.

5) Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_\mathrm{n}(\mathbb{R})$, on a l'inégalité :

$$|Tr(A)| \leq \sqrt{n}||A||_2$$

Exercice 2 - Produit scalaire sur un espace de fonctions.

On note $E = \mathcal{C}([-1;1], \mathbb{R})$. Pour f et g de E, on définit :

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

1) Montrer que E muni de $< .,. >$ est un espace préhilbertien.

2) On considère le sous-espace vectoriel F de E engendré par 1 , x et x^2 . Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée P_0, P_1, P_2 de F telle que :

$$\mathbb{R}P_0 = \mathbb{R}.1$$
$$Vect(P_0, P_1) = Vect(1, x)$$
$$Vect(P_0, P_1, P_2) = Vect(1, x, x^2)$$

3) On définit alors (par récurrence) la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes qui vérifient pour tout n : $(P_O, P_1, \dots P_n)$ est une famille orthonormale et :

$$Vect(P_0, P_1, \dots, P_n) = Vect(1, x, \dots, x^n)(= \mathbb{R}_n[x])$$

En notant $G = L^2([-1;1], \mathbb{R})$, on a $E \subset G$; montrer que :

$$\overline{\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}.P_i} = G$$

Exercice 3 - Produit scalaire sur un espace de fonctions ; projection orthogonale.

On note $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) | f^2(x)e^{-x} \text{ soit intégrable sur } \mathbb{R}^+\}$

1) Montrer que l'on peut définir pour f et g de E :

$$< f, g >= \int_{\mathbb{R}^+} f(x)g(x)e^{-x}dx$$

2) Montrer que E muni de $< ., . >$ est un espace préhilbertien.

3) Calculer $< x^n, x^m >$ pour m et n entiers.

4) On considère F le sous-espace vectoriel de E engendré par 1, x et x^2. Donner une base orthonormée de F.

5) On souhaite calculer (il existe, mais pourquoi ?) le réel :

$$d = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^+} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 e^{-x}dx$$

Proposer une méthode.

6) Expliquer pourquoi il existe un unique projeté orthogonal de l'élément $z = x^3$ de E sur F. Le calculer. En déduire d.

7) Déterminer le projeté de x^3 sur $Vect(1, x, x^2)$ dans le cadre de l'exercice 2.

Exercice 4 - Base Hilbertienne. Série de Fourier.

On considère $E = L^2([-\pi; \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $< f, g >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

On note $e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et pour $n \geq 1$: $e_n(x) = \cos(nx)$ et $f_n(x) = \sin(nx)$. Ils engendrent les sous-espaces vectoriels de dimension finie : $F_n = Vect(e_0, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$

1) Vérifier que pour tout n entier, $(e_0, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ est une base orthonormale de F_n .

2) On note $S_n(f)(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ la projection orthogonale d'un élément f de E sur F_n. Que valent les coefficients a_k et b_k ?

3) Montrer que si f est paire (resp. impaire) (attention, notions à préciser dans L^2 !) alors les b_k sont nuls (resp. les a_k sont nuls).

4) On considère la fonction définie sur $[-\pi; \pi]$ par $f(x) = \pi - |x|$. Calculer ses coefficients de Fourier.

5) En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$, puis $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

6) Soient g et h de E, et une suite f_n d'éléments de E qui converge vers g (dans E), et vers h presque partout. Montrer que $g = h$ presque partout.

7) Montrer que si les coefficients de Fourier $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'un élément f de E vérifient

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| + |b_k| < +\infty$$

alors on a $S_n(f)$ qui converge presque partout vers f. Appliquer ce qui précède avec f de la question 4).