TD L3 Mathématiques / Mesure et probabilités.
Feuille 1 : Limite d'une suite de fonctions. Rappels sur l'intégrale de Riemann et les intégrales convergentes.

Les exercices "pour chercher" ne seront pas nécessairement corrigés en TD.

I Limite d'une suite de fonctions

Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions, et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que la suite f_n converge simplement vers la fonction f si et seulement si pour tout x de X, la suite $f_n(x)$ admet $f(x)$ comme limite.

1) Etudier l'exemple suivant :

$$X = [0;1] \text{ et } f_n(x) = x^n$$

Tracer quelques courbes f_n et la limite f. La continuité est-elle préservée par passage à la limite ?

2) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne maintenant la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f_n soit nulle en dehors de $[0; \frac{2}{n}]$, affine sur $[0; \frac{1}{n}]$ et $[\frac{1}{n}; \frac{2}{n}]$, et prenne la valeur n en $\frac{1}{n}$. Montrer que la suite f_n admet une limite simple (que l'on notera f) sur $\mathbb{R}$. Calculer $\int_{\mathbb{R}} f$ et pour tout n : $\int_{\mathbb{R}} f_n$.

3) Chercher sur quels domaines les suites de fonctions suivantes admettent une limite simple.

$$\text{a) } f_n(x) = e^{-nx^2} \text{ ; b) } f_n(x) = e^{-nx} \text{ ; c) } f_n(x) = x^n \text{ ; d) } S_n = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

$$\text{e) } f_n(x) = \cos^n(\tfrac{1}{x}) \text{ définie sur } \mathbb{R}^*$$

4) Montrer que si une suite $(f_n : I \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications croissantes sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ converge simplement vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, alors f est croissante.

5) Etudier la convergence simple des suites de fonctions suivantes :

$$\text{e) } f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$$

$$\text{f) } f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{1 + nx^2}$$

$$\text{g) } f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f_n(x) = nx^2 e^{-nx}$$

$$\text{h) } f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{xe^{\frac{x}{n}} - n\sin(\frac{x}{n})}{\log(1 + \frac{x}{n})}$$

$$\text{i) } f_n : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{1 + nx}{(1 + x)^n}$$

$$\text{j) } f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f_n(x) = e^{-n\sin^2(x)}$$

II Intégrales convergentes.

1) Citer des classes de fonctions Riemann intégrables sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$.

2) Rappeler la définition d'une fonction localement intégrable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

3) Soit f une fonction localement intégrable sur $I = [a;b[$ (avec deux réels a et b vérifiant $a < b$). Quand dit-on que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est convergente ? Quand dit-on que cette intégrale est absolument convergente ? Même question si on remplace $[a;b[$ par l'intervalle $I = [a;+\infty[$, $I =]a;b]$, $I =]-\infty;+\infty[$, ...

4) Déterminer pour quels α de $\mathbb{R}$ les intégrales de référence $\int_I \frac{1}{x^\alpha}$ sont convergentes pour $I =]0;1]$ puis pour $I = [1;+\infty[$.

5) Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes. On mettra en évidence les méthodes utilisées.

$$\text{a)} \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \quad \text{b)} \int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \quad \text{c)} \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx \quad \text{d)} \int_0^1 \sin(\frac{1}{x})dx \quad \text{e)} \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x}dx$$

6) Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\text{a)} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sin x}{(x-1)^3}dx \quad \text{b)} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x . \arctan x}{x^2}dx \quad \text{c)} \int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$$

$$\text{d)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos x(1-\cos x)}} \quad \text{e)} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx \quad \text{f)} \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(\sqrt{x})}{1+x^2}dx$$

Pour chercher.

7) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue et décroissante. Montrer que $\sum_{n\geq 1} f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature.

8) Montrer qu'il existe des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continues, telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ soit convergente, mais n'admettant pas 0 comme limite en $+\infty$.

9) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ est convergente mais pas absolument convergente (on parle d'intégrale semi-convergente).

10) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et impaire. On a $\int_{-X}^{+X} f(x)dx$ qui est nulle pour tout X de $\mathbb{R}$. Peut-on en conclure que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente ?