TD L3 Mathématiques / Mesures et probabilités. / Ln 4
Feuille 1 : Bornes supérieures de parties de $\mathbb{R}$, limites supérieures et inférieures.

Les exercices "pour chercher" ne seront pas nécessairement corrigés en TD.

I Bornes supérieures et inférieures d'une partie de $\mathbb{R}$.

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Si X est majoré, on considère l'ensemble des majorants de X (i.e : l'ensemble des M de $\mathbb{R}$ tels que pour tout x de X $M \geq x$). Le plus petit de ces majorants est appelé borne supérieure de X (M est le plus petit des majorants si pour tout majorant m on a $M \leq m$). On note alors $sup\ X = M$. Si X n'est pas majoré, on définit $sup\ X = +\infty$.

Remarque : Dans le cas d'une partie majorée X de $\mathbb{R}$, un tel élément existe toujours; c'est une des propriétés fondamentales de l'ensemble $\mathbb{R}$.

1) Un critère pratique : Soit X une partie bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que M de $\mathbb{R}$ est borne supérieure de X si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

i) Pour tout x de X, on a $M \geq x$
ii) Pour tout $\epsilon > 0$ l'ensemble $X \cap [M - \epsilon, M]$ est non vide.

2) En s'inspirant de la définition de la borne supérieure, définir la borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$. (On admettra également son existence)

3) Calculer les bornes inférieures et supérieures des ensembles suivants :

a) $[0, 3[$; b) $\{0\} \cup]1, 2]$; c) $\{1 + \frac{1}{n} | n \geq 1\}$;
d) $\{x \in \mathbb{R} | x^2 < 2\}$; e) $\{x \in \mathbb{R} | x^2 \leq 2\}$

La borne supérieure d'un ensemble en fait elle toujours partie ?

4) Démontrer que pour deux parties de $\mathbb{R}$ A et B vérifiant l'inclusion $A \subset B$, on a l'inégalité : $sup\ A \leq sup\ B$. Quelle est la propriété correspondant pour la borne inférieure ?

5) Pour chercher : Démontrer les propriétés suivantes :

a) $sup(A \cup B) = max(sup\ A, sup\ B)$
b) $sup(A + B) = sup\ A + sup\ B$

II Limite supérieure et inférieure d'une suite de réels.

Le but de ce premier exercice est de vérifier que la définition proposée de la limite supérieure (et de la limite inférieure) d'une suite de nombres réels a bien un sens.

1) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ .On note :

$$X_n = \{x_k \mid k \geq n\}$$

$$a_n = sup\ X_n$$
$$b_n = inf\ X_n$$

a) Déterminer a_n et b_n, étudier leur comportement dans les cas suivants :

$$\alpha)\ x_n = n\,;\ \beta)\ x_n = (-1)^n\,;\ \gamma)\ x_n = n(1+(-1)^n)\,;\ \delta)\ x_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

b) Démontrer que la suite a_n est constante égale à $+\infty$ si et seulement si un des termes a_N vaut $+\infty$. (De même pour b_n avec $-\infty$)
c) On étudie à partir de maintenant le cas où pour tout entier n a_n est un réel (resp. b_n). Montrer que la suite a_n est décroissante (resp. b_n croissante).
d) Montrer que si a_n ne tend pas vers $-\infty$ (resp b_n vers $+\infty$), elle admet une limite L dans $\mathbb{R}$.

On peut donc définir la limite de a_n (resp b_n)comme un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ dans tous les cas. On définit ainsi la limite supérieure (resp limite inférieure) de la suite x_n, et on la note $lim\ sup_{n\to\infty}$ (resp $lim\ inf_{n\to\infty}$)

Note : On pourrait définir de même la limite supérieure d'une suite d'éléments x_n de $\overline{\mathbb{R}}$.

2) Premières propriétés :

a) Montrer que pour toute suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{R}}$ on a :

$$lim\ sup_{n\to\infty}(-x_n) = -lim\ inf_{n\to\infty}(x_n)$$

b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels bornée ; montrer que $L = lim\ sup_{n\to\infty}$ est la plus grande des valeurs d'adhérence de la suite x_n (c'est à dire la plus grande des limites possibles des suites réelles de la forme $x_{\phi(n)}$ avec ϕ strictement croissante).
c) Montrer qu'une suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{R}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $lim\ sup_{n\to\infty}(x_n) = lim\ inf_{n\infty}(y_n)$. Dans ce cas, il y a 'egalité avec la limite.
d) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que pour tout n : $x_n \geq y_n$. Que peut on dire des limites supérieures et inférieures ?

3) Pour chercher

a) Avec x_n et y_n deux suites de réelles, que dire de la limite supérieure de la somme : $lim\ sup_{n\to\infty}(x_n + y_n)$?
b) avec $x_n \geq 0$, montrer que $lim\ sup_{n\to\infty}(\frac{1}{x_n}) = \frac{1}{lim\ inf_{n\infty} x_n}$ avec une convention que l'on précisera.
c) Déterminer les limites supérieures et inférieures des suites :

$$u_n = (1 + \frac{(-1)^n}{n})^n \text{ et } v_n = n^3 sin(\frac{1}{n}) - n^2 cos(\frac{1}{n})$$

d) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$, continue et croissante Soit u_n une suite réelle bornée de limite supérieure α et inférieure β. Montrer que : $f(\alpha) = lim\ inf_{n\to\infty} f(u_n)$ et que $f(\beta) = lim\ sup_{n\to\infty} f(u_n)$.

III Limite supérieure et inférieure d'une suite de fonctions.

Pour toute suite de fonctions $f_n \ :\ X \to \mathbb{R}$, on peut définir une fonction f qui pour tout x de X prend la valeur :

$$f(x) = lim\ sup_{n\to\infty} f_n(x)$$

La fonction f ainsi définie sur X et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ est appelée limite supérieure de la suite de fonctions f_n, et notée $lim\ sup_{n\to\infty} f_n$. On définit de facon analogue la limite inférieure d'une suite f_n de fonctions.

Déterminer les limites supérieures et inférieures des suites de fonctions suivantes :

a) $f_n(x) = e^{-nx^2}$ b) $f_n(x) = \cos^n(\frac{1}{x})$ c) $f_n(x) = e^{-nx}$

d) $f_n(x) = x^n$ e) $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$

f) $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$ g) pour θ fixé dans $\mathbb{R}$ $f_n(x) = sin(nx + \theta)$

Pour g), on pourra admettre (ou démontrer!) que si $\frac{x}{\pi}$ n'est pas dans $\mathbb{Q}$, alors $\mathbb{N}x + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (autrement dit, $\mathbb{N}x$ est dense sur le cerlce unité).