TD L3 Mathématiques - Mesure et probabilités.

Feuille 7- Théorèmes de Lebesgue.

1 Calculs de limites.

Exercice 1 *Pour s'entraîner.*
Etudier les limites quand $n \to \infty$ des quantités suivantes :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n \, dx$ b) $\int_0^{\infty} n \sin(x/n)/(x(1+x^2)) \, dx$

c) $\int_0^1 (1+nx)/(1+x)^n \, dx$ d) $\int_0^n (1-x/n)^n \cos(x) \, dx$

e) $\int_0^{\infty} \sin(\pi x)/(1+x^n) \, dx$ f) $\int_1^{\infty} nx^{\alpha} \arctan(nx)/(1+nx^2) \, dx$

g) $n^2 \int_0^1 (1-x)^n \sin(\pi x) \, dx$ h) $\int_0^1 (\cos(1/x))^n \, dx$

Exercice 2 *Masse de Dirac.*
Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ et bornée. On pose $I_n = \int_0^{\infty} f(t) n e^{-nt} \, dt$. Justifier l'existence de I_n et déterminer la limite de I_n quand $n \to \infty$.

2 Intégrales à paramètres

Exercice 3 *Un exemple d'intégrale à paramètre.*
Déterminer pour quels λ de $\mathbb{R}$ on peut définir l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{\sqrt{1+x^2}} e^{-x} dx$$

Montrer que l'on définit ainsi une fonction continue, puis que cette fonction est dérivable.

Exercice 4 *Restreindre le paramètre.*
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\arctan(\lambda x)}{x(1+x^2)} \, dx.$$

Montrer que F est continue sur tout intervalle de la forme $[-M, M]$ où $M \in \mathbb{R}^+$. En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que F est en fait dérivable sur $\mathbb{R}$ (et remarquer que pour utiliser le théorème de Lebesgue, il n'y a plus besoin de restreindre l'intervalle).

Exercice 5 *Petit problème.*
On considère les fonctions

$$F: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}^+} \cos(tx) e^{-x^2}\, dx \end{array} \qquad G: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}^+} \sin(tx) \frac{e^{-x^2}}{x}\, dx \end{array}$$

a) Vérifier que les fonctions F et G sont bien définies.
b) Montrer que F et G sont dérivables et donner une expression des dérivées.
c) Montrer que F est solution d'une certaine edo du 1er ordre.
d) En déduire F et calculer $\lim_{t\to\infty} G(t)$.