

Ce document est une compilation de souvenirs d'oraux de la session 2011 du CAPES externe de mathématiques : souvenirs de questions posées par le jury, et souvenirs de dialogues entre candidats et jurys. Il fait suite à un premier recueil de souvenirs d'oraux des sessions 2006, 2007 et 2008, toujours disponible sur ma page, mais un peu obsolète.

Merci à Bastien ainsi qu'aux visiteurs qui m'ont décrit les oraux auxquels ils avaient assisté. A nouveau, on prendra garde au fait que les questions et les dialogues ici restitués ont subi le triple biais de la subjectivité, de la mémoire et de mon écriture.

Bien sûr, personne n'imagine un seul instant qu'on se pare pour passer l'oral en travaillant les quelques questions proposées ici. Tout au plus, on trouve une première base d'exercices pour réviser les thèmes du concours, on se fait une idée de l'enchaînement des questions et des réponses ainsi que du niveau de précision demandé.

Ce document ne contient en fait que des questions. Il ne contient aucune proposition de réponse aux questions du jury. Les réponses des candidats qui sont rapportées posent en fait plus de questions qu'elles n'apportent de corrections. Il ne s'agit en aucun cas de modèles de réponse ni de rédaction.

Je propose de travailler sur ces pages à l'aide d'une carte postale. Ne la faire glisser pour découvrir la ligne suivante qu'après avoir bien réfléchi, avoir essayé de la deviner. Essayer de répondre aux questions posées, mais aussi réagir aux réponses proposées par les candidats, imaginer les difficultés qu'elles soulèvent.

Quand il est utile et connu, le contexte (plan, exercice proposé par le candidat...) est rappelé. Pour l'épreuve sur dossier, les comptes-rendus sont précédés des dossiers : ceux-ci sont extraits du rapport de jury. Le candidat parle comme ci, alors que **le jury parle comme ça**. J'ai rajouté quelques questions à mon goût : elles sont précédées d'un ♣.

Une fois n'est pas coutume, ce document n'aurait jamais vu le jour sans l'accueil et l'amitié de Cécile et Nicolas : merci !

Fabien Herbaut
herbaut@unice.fr

Exposé 3 - Expérience aléatoire. Probabilité. Probabilité conditionnelle.

L'exposé est composé de trois parties dont les titres suivent l'intitulé. L'exposé commence par la définition suivante :

Définition 1 : Une expérience est dite aléatoire lorsqu'elle a plusieurs issues (ou résultats possibles) et que l'on ne peut ni prévoir ni calculer laquelle de ces issues sera réalisée.

Dans la première partie du cours, $p(A)$ est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui composent A . La troisième partie commence par la définition d'une probabilité conditionnelle. La définition suivante est ainsi énoncée :

Définition 7 : Si $B = A_1 \cup \dots \cup A_n$ est une partition, alors $p(B) = \sum_{i=1}^n p(A_i)$.

Un exemple suit, qui précède le théorème suivant :

Théorème 2 : Si $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux disjoints, alors pour tout événement B on a $p(B) = p(B \cap A_1) + \dots + p(B \cap A_n)$.

Développement : développer la partie probabilités conditionnelles.

1. Dans votre dernière partie, est-ce que vos deux théorèmes sont pareils ?

...

Est-ce que c'est le même ensemble B ?

...

Est-ce qu'on peut dessiner les ensembles A_i , dans un rectangle Ω et on prend pour ensemble B la moitié du rectangle.

Le candidat dessine au tableau.

Est-ce qu'ainsi l'ensemble des $B \cap A_i$ est une partition de B ?

...

Est-ce que ça a un intérêt de faire une partition de B ?

...

Est-ce qu'il n'y a pas une partition qui aurait plus d'intérêt ?

...

Dans votre théorème 2, est-ce qu'il ne faut pas rajouter quelque chose ?

$\Omega = A_1 \cap \dots \cap A_n$ avec les A_i incompatibles.

Comment ça s'appelle ?

2. La définition 7, c'est une définition ou une propriété ?

J'ai mis définition, mais en fait c'est une propriété.

C'est quoi la différence entre définition et propriété ?

La définition est admise, la propriété on peut la démontrer.

Et alors le numéro 7 ?

On peut le démontrer.

Comment ?

Par récurrence.

3. Quand est-ce que c'est important de définir des probabilités conditionnelles ?
 ...
 Et quand est-ce qu'on dit que deux évènements sont indépendants ?
 ...
 A quoi sert le théorème 2 ? Est-ce qu'on peut le prolonger dans certains cas ?
 ...
 Quel est le nom de cette formule ?
4. Pourquoi cette notation $p_A(B)$?
5. Comment est-ce qu'on peut rendre compte des expériences aléatoires mathématiques ? Est-ce qu'une expérience aléatoire c'est un objet mathématique ?
 Non, c'est aléatoire.
6. Vous avez écrit que $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ si $A \cap B = \emptyset$. Et sinon, c'est faux ?
 Non, sinon on a $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
 Comment vous le montrez ?
 Le candidat fait une figure.
 Comment vous envisagez la démonstration ? La loi de probabilités que vous utilisez, elle est générale, ou c'est celle que vous avez définie dans le cours ?
 $p(A)$, c'est la somme des éléments.
 Non, ce n'est pas le bon vocabulaire...
7. Pourquoi est-ce que $p(\emptyset) = 0$?
 Ca, c'est l'ensemble vide. Donc sa probabilité égale 0.
 Pourquoi ?
8. Reprenons la figure que vous avez faite avec deux ensembles A et B qui s'intersectent.
 Est-ce que vous pouvez décrire les différentes parties avec des $\cup$ et des $\cap$?
9. Est-ce qu'on peut reprendre votre définition 6 ? Il n'y a pas une étourderie ?
 ...
 On lance un dé, et on se demande quand le résultat est inférieur ou égal à 4 ?
 La candidate écrit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, puis $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\Omega_2 = \{4, 5, 6\}$.
 Est-ce qu'on est dans une situation d'équiprobabilité ?

Un deuxième candidat présente le même exposé :

La première partie est intitulée *Expérience aléatoire* : elle comprend l'exemple suivant : une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On en tire une, la remet, puis on en tire une deuxième. La deuxième partie est intitulée *Probabilité*. La troisième et dernière partie est intitulée *Probabilité conditionnelle*. C'est la fin du temps réglementaire : le candidat a dans cette partie juste le temps d'écrire un exemple :

60 % des familles ont une voiture,

65 % des familles ont un téléviseur,

24 % des familles n'ont ni l'un des autres.

On choisit une famille au hasard : calculer la probabilité que cette famille ait une voiture sachant qu'elle a un téléviseur.

Puis, le candidat a juste le temps d'écrire les deux parties à venir :

1) *Définition*

2) *Formule des probabilités totales*

Le jury le coupe alors :

Est-ce que vous pouvez conclure ?

Développement : Est-ce que vous pouvez développer la troisième partie, en démontrer les théorèmes ?

1. Est-ce qu'on peut revenir sur votre exemple de la première partie ? Est-ce que vous pouvez préciser ? Quel est l'Univers ?

On peut utiliser un tableau.

Mais quel est l'Univers ?

C'est les 25 couples $(1,1)$, $(1,2)$,...

Est-ce qu'on ne peut pas le dire de façon plus condensée ?

$\Omega = \{(a,b) \mid (a,b) \in [1,5]^2\}$.

Et réduire encore un peu ?

Le candidat donne une forme plus condensée.

Bien. Que pensez-vous de la phrase que vous avez prononcée : les numéros ont la même chance d'apparition, donc la loi est équirépartie ?

2. Et si on ne remet pas la boule, qu'est-ce qui change ?

C'est pareil.

Quels sont les cas possibles ?

3. Est-ce que vous pouvez nous donner un exemple pour illustrer la notion d'indépendance ?

Par exemple je reprends le dé : un évènement serait d'obtenir un nombre pair, un autre d'obtenir un nombre impair.

Est-ce que vous connaissez une situation où on a besoin d'indépendance pour pouvoir mener des calculs ?

...J'ai l'impression que je connais...

Par exemple, on lance une pièce de monnaie trois fois de suite ?

...

Comment s'appelle cette expérience ?

....

On cherche la probabilité d'avoir au moins deux fois pile. Dans quel schéma d'étude sommes-nous ?

...

Quel type de loi est caché derrière ?

...

Où alors je lance 100 pièces : quelle est la probabilité d'obtenir 13 piles ?

4. Vous définissez dans un premier temps p_A . Puis vous dites que c'est une probabilité. Est-ce que vous pouvez le démontrer ?

...

Qu'est-ce qu'il faut vérifier ?

Que $p_B(A)$ est dans l'intervalle $[0, 1]$.

Est-ce le cas ?

Oui, car le numérateur est dans $[0, 1]$, le dénominateur aussi.

Par exemple, $\frac{0,8}{0,6}$?

Ah non...

Alors reprenez...

... $B \cap A \subset A$...

Oui ! Donc...

5. Vous avez donné une définition de probabilité en termes d'issues... mais sinon, si on s'élève un peu, qu'est-ce qu'une probabilité ?

...

On peut calculer la probabilité de quoi ?

Des événements, des parties de Ω .

Donc, qu'est-ce qu'une probabilité finalement ?

6. Vous avez donné un exemple pas forcément réaliste... Est-ce que vous pourriez donner un autre exemple. Quelque chose inspiré d'un sujet de Bac récent par exemple ? Un exemple très concret ?
La probabilité qu'il ait déjà vu le sujet ?
Où alors, la probabilité qu'un candidat tombe sur un exposé qu'il a travaillé, sachant qu'il en a travaillé 50 sur les 70 ?

7. Connaissez-vous un outil pratique pour les probabilités conditionnelles ? Pour les représenter aux élèves ?

8. Vous avez justifié la formule des probabilités totales par un dessin : est-ce que vous pourriez justifier autrement ?

...

Vous parlez de partition : comment l'utiliser ?

Avec la somme des événements...

Est-ce qu'on peut sommer des événements ?

Exposé : Variable aléatoire

Développement : on demande au candidat de développer la partie sur la loi binomiale : probabilités, espérance et variance.

1. Concernant la loi binomiale, vous avez expliqué le calcul de $p(X = k)$ dans le cas où $n = 3$ et $k = 1$. Et dans le cas général ?

...

A l'oral, vous avez dit que c'était le nombre d'arrangements ?

...

Alors, comment vous expliquez ça à des élèves ?

...

Est-ce que vous dites que ça marche pour 3, donc ça se généralise ? Si je suis élève, je ne comprends pas...

...

De la façon dont vous l'avez présenté, ce n'est pas clair : ce coefficient $\binom{n}{k}$, vous l'introduisez à ce moment là, ou les élèves le connaissent déjà ?

Ils l'auront déjà vu avant.

Alors quelle est la définition qu'ils ont ?

$\binom{n}{k}$ est le nombre de combinaisons de k éléments parmi n .

...

2. Dans l'arbre que vous avez dessiné pour illustrer la loi binomiale, les deux issues sont notées E et S ... pour récapituler le chemin parcouru, à la fin d'une branche vous avez noté $\{S, E, E\}$ et à la fin d'une autre, vous avez noté $\{E, E, S\}$: que pensez-vous de cette notation ?

...

$\{S, E, E\}$ et $\{E, E, S\}$, ce ne serait donc pas la même chose ?

C'est admis ?

Mais les accolades, qu'est-ce que ça veut dire ?

3. Tout à l'heure, vous avez parlé d'arrangements, est-ce un lapsus, ou un autre objet mathématique ?

Ca existe : il n'y a pas de répétition.

...

L'arrangement est ordonné, pas la combinaison : par exemple, à un arrangement donné, on peut lui faire correspondre plusieurs combinaisons.

Vous êtes sûr de ça ? Par exemple, combien de combinaisons correspondent à $\{E, E, S\}$?

4. Comment s'appelle une loi qui prend uniquement les valeurs 0 et 1 ?

5. Quelles sont les raisons pour lesquelles vous avez choisi vos exercices ?

6. Dans la première partie intitulée "Définitions", vous commencez par donner le cadre $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Est-ce qu'on est toujours dans ce cadre là ? Par exemple pour la loi de Poisson ?
 Ω est toujours fini, mais $X(\Omega)$ est infini.
 Mais comment est-ce possible ?

7. Est-ce qu'on peut revenir sur la loi de Poisson : pourriez-vous nous donner une idée de démonstration pour l'espérance et la variance ?
 Quand on somme, on retrouve l'exponentielle de λ . Mais il y a le terme en h qu'on ne peut sortir de la somme.
 Alors ?

8. Vous êtes allé très vite sur la deuxième partie, "Espérance". Est-ce que vous pouvez nous donner des propriétés de l'espérance ?
 Par exemple on a $E(X) = \sum_{k=0}^n k.P(X=k)$ et on a aussi $E(aX+b) = aE(X) + b$.
 Est-ce que vous pouvez le démontrer ?

 Pour introduire les variables aléatoires, le premier exemple de l'exposé est celui d'un jeu : le candidat fait tourner une roue. Il est affiché sur la roue le gain ou la perte : une fois +5, deux fois 0, quatre fois -2.

9. Est-ce qu'on peut faire le calcul de l'espérance dans de votre premier exemple, la roue avec les gains ?
 $E(X) = \dots$ quelques calculs plus loin -2.
 Est-ce qu'on peut reprendre ce calcul avec votre définition ?
 Quelques calculs plus loin : $\sigma(X) = \frac{-3}{8}$.
 Euh... Alors que représente ce $\frac{-3}{8}$?
 C'est la moyenne de toutes les valeurs.
 Alors, ce jeu, à qui il profite ?
 A l'organisateur !

Exposé 12 - P.G.C.D et P.P.C.M de deux entiers naturels.

Développement : Pouvez-vous développer la partie sur l'algorithme d'Euclide ?

Pendant son développement, la candidate montre et commente son application de l'algorithme sous Algobox. Elle teste avec 48 et 12. Le programme renvoie comme p.g.c.d 12, et la candidate s'étonne :

Ah...c'est bizarre...

Est-ce que c'est étrange ? Ah mince, je n'ai pas le droit de parler... A vous...

1. Alors revenons sur le P.G.C.D de 12 et de 48 ?

Depuis j'ai refait le calcul, je suis d'accord, c'est normal.

Ok, on peut relancer le programme en interchangeant 12 et 48 en entrées ?

Oui...on retrouve 12.

Tiens c'est bizarre...

Non, cette ligne du programme interchange a et b lorsque $b > a$.

2. Lors de son exposé, la candidate a écrit :

P.P.C.M : l'ensemble des multiples communs admet un plus petit élément.

Vous avez le droit de corriger cette définition du P.P.C.M

(la candidate corrige, explique qu'enne considère l'ensemble des entiers strictement positifs tels que...)

Pourquoi faut-il prendre des entiers strictement positifs ?

3. Vous avez donné comme application du p.g.c.d que si on ajoutait deux fractions, le dénominateur de la fraction obtenue était le p.g.c.d des deux dénominateurs ?

Oui.

Toujours ?

...

Par exemple $\frac{4}{8} + \frac{3}{6}$?

Le P.P.C.M de 8 et 6 est 48...

Comment le savez-vous ?

Et bien $8 = 2^3$ et $6 = 2 \times 3$, donc le P.P.C.M est ... euh 24. Alors $\frac{4}{8} + \frac{3}{6} = \frac{16+12}{24}$...

Attention !

Euh, $\frac{4}{8} + \frac{3}{6} = \dots = 1$.

Bon, et alors ?

4. Vous avez fait un programme sur les diviseurs ?

Oui, sur XCas, il fait la liste des diviseurs premiers d'un entier.

Vous pouvez expliquer ?

5. Le dernier chapitre du plan de l'exposé a juste été évoqué par la candidate, faute de temps.
 Les deux points évoqués sont les théorèmes de Bezout et de Gauss.
 J'aimerais revenir sur le théorème de Bezout. Qu'est-ce qu'il dit ?
 (La candidate écrit.)
 On regarde le théorème : vous avez une idée de la démonstration ?
 (La candidate explique.) Vous avez dit avoir fait un programme qui calcule les entiers u et v qui apparaissent dans le théorème de Bezout ?
 Oui, sous Excel.
 Est-ce qu'on peut regarder ?
 (la candidate exécute le programme)
 Est-ce qu'on peut rajouter une colonne qui permette la vérification ?

6. Il nous reste juste Gauss alors...
 J'ai juste eu le temps de l'écrire.

7. Bezout et Gauss, ça sert à quoi ?
 A démontrer que des nombres sont premiers entre eux.

♣ Par exemple, si a et b sont deux entiers premiers entre eux, comment calculer l'inverse de a dans $\frac{\mathbb{Z}}{b\mathbb{Z}}$?

Un deuxième candidat traite cet exposé. Le candidat expose la première partie de son cours, intitulée *Divisibilité*, la deuxième partie *Division euclidienne*, la troisième *P.G.C.D.* Lors de la quatrième partie appelée *Euclide*, le jury lui signale le temps restant. Concernant la cinquième partie de son exposé, le candidat a à peine le temps d'écrire le titre *P.P.C.M* et d'écrire *Définition* : que le jury le coupe : On doit s'arrêter là.

Développement : Pouvez-vous développer la division euclidienne ?

Lors de son développement, le candidat explique que dans le cas où on divise $a > 0$ par $b > 0$, on considère l'ensemble $\mathcal{B}_n = \{n \in \mathbb{N} \mid b.n \leq a\}$. Le candidat explique en particulier que $\mathcal{B}_n$ est fini car il y a un nombre fini d'entiers qui vérifient $b.n \leq a$.

1. Vous dites dans votre preuve que $\mathcal{B}_n$ est fini : comment pourriez-vous le démontrer plus précisément ?
 On a $n \leq b \times n \leq a$, donc si $b \times n \leq a$, alors $n \leq a$.
 Est-ce qu'on peut avoir une estimation plus précise du cardinal de $\mathcal{B}_n$?
 $a + 1$.
2. Est-ce que vous connaissez une relation entre le p.g.c.d et le p.p.c.m ?

3. Vous avez évoqué l'algorithme d'Euclide. Comment êtes-vous sûr qu'il s'arrête ?

La suite des restes diminue, donc s'arrête.

Est-ce que ça suffit qu'elle diminue ?

Il faut aussi qu'elle soit positive.

Oui, et la décroissance, est-ce que ça suffit ?

4. Est-ce qu'on peut résoudre l'équation suivante : $4x - 2y = 5$ avec x et y des entiers naturels ?

5. Comment pourriez-vous déterminer le p.p.c.m de deux nombres en fonction de leur décomposition ?

Est-ce que je peux prendre un exemple ?

Oui.

12 et 8. On a $12 = 2^2 \times 3$ et $8 = 2^3$. Donc $\text{p.p.c.m}(12, 8) = 48$.

C'est un multiple, mais ce n'est pas le plus petit !

Le candidat corrige.

Alors, est-ce que vous pouvez donner une règle générale ?

Le candidat écrit : si la décomposition d'un entier a est $a = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$, et si la décomposition d'un entier b est $b = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_s}$, alors $\text{p.p.c.m}(a, b) = p_1^{\max(m_1, n_1)} \times \dots$

Mais est-ce que ce sont forcément les mêmes nombres premiers qui apparaissent ?

...

6. Et pour le p.g.c.d ?

En utilisant la formule donnant le produit du p.g.c.d et du p.p.c.m...

Et sans utiliser cette formule ?

...

Pouvez-vous reprendre votre exemple ?

Exposé 15 : Nombres premiers. Décomposition en produits de facteurs premiers.

Développement : théorème fondamental de l'arithmétique (énoncé et démonstration)

1. Est-ce qu'on peut revenir sur la démonstration de l'unicité ? Est-ce qu'il n'y a pas un problème avec les indices ? Est-ce que $k = m$?

Non, on a k différent de m .

Que fait-on des nombres premiers qui restent ?

Ils sont égaux à 1 car on peut écrire $p_{k+1}^0 = 1$. Alors $k = m$.

Vous êtes sûr ?

Non, car ce serait un cas particulier.

Que faut-il rajouter dans votre démonstration pour ne pas restreindre la généralité ?

Par exemple on prend $k \leq m$.

Et alors ?

On peut simplifier, par exemple on a $p_1 \times \dots \times p_k = q_1 \times \dots \times q_{k+1} \times \dots \times q_m$. Or on a $q_1 = p_1$, ... et $q_k = p_k$. Donc on a $q_{k+1} \times \dots \times q_m = 1$, et alors...

Ok !

2. Dans votre remarque, vous avez donné une expression de la décomposition en facteurs premiers. Pouvez-vous préciser les quantificateurs ?

3. Vous avez proposé une application : la recherche des diviseurs de 60. Pouvez-vous expliquer ?

Cherchons ces diviseurs sous la forme $p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$ en utilisant la décomposition en facteurs premiers.

Pouvez-vous les citer ?

On a $60 = 2^2 \times 3 \times 5$. Le produit de un, deux ou trois nombres premiers sera un diviseur de 60 d'après la remarque faite dans le cours. Si $p_1, p_2, \dots, p_k$ divisent n , alors $p_1 p_2 \dots p_k$ également.

Combien un entier a-t-il de diviseurs ?

Partons de $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$...je pense que c'est en relation avec les exposants α_i : c'est $(\alpha_1 + 1) \times \dots \times (\alpha_k + 1)$...je ne suis pas sûr...

Comment le vérifier ?

Prenons un exemple.

Ok : vérifier avec 60 alors.

Les diviseurs de 60 sont 1, 2, 4, 3, 6, 12, 15, ... ,45, 60, ... 10 et 20... On en a 11...Ca ne marche pas... Il nous faut une meilleure méthode pour ne pas en oublier : je propose de présenter le décompte avec un arbre : sur une première branche je mets les trois possibilités 2^0 , 2^1 et 2^2 . Ensuite à partir de chacune des branches je fais partir deux branches 3^0 et 3^1 ...Ok, il nous manquait 30, et on a bien 12 diviseurs, et la formule est bonne.

4. Dans votre plan, vous avez donné des exemples de nombres premiers ou pas, par exemple $2^7 - 1$ et $2^n - 1$. Pourquoi avoir choisi ces nombres ? Qu'est-ce qu'ils représentent ?

Ce sont les nombres particuliers dits de Mersenne. Je sais qu'il existe un lien entre les nombres premiers et ces nombres, mais je ne m'en rappelle plus.

Est-ce qu'on fait votre exemple ?

D'accord, avec le test de primalité ?

5. Dans votre plan, vous avez donné une application pour le calcul du p.g.c.d et du p.p.c.m ? Est-ce que vous pouvez expliquer ?

Par exemple pour le p.g.c.d : on prend tous les facteurs premiers affectés de la plus petite puissance. *D'après le candidat qui nous rapporte cet oral, le jury fronce fort les sourcils à ce moment !*

Faites-le sur un exemple.

Prenons $1008 = 2^4 \times 3^2 \times 5^0 \times 7$ et $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7^0$, alors ... (le candidat finit le calcul).

Connaissez-vous une autre méthode ?

L'algorithme d'Euclide.

Faites-le sur l'exemple.

...

Exposé 17 - Module et argument d'un nombre complexe.

Développement : On demande au candidat de développer la partie sur l'existence et l'unicité des racines n -ièmes de l'unité, ainsi que le calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Le candidat développe avec précautions la partie sur l'existence et l'unicité des racines n -ièmes de l'unité, cela prend du temps.

Qu'est-ce qu'il reste à faire ?

Le calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Attendez...on va s'arrêter là pour le développement.

1. Avant de reprendre ce calcul, est-ce que vous pouvez nous dire ce qui dans votre exposé ne va pas dans les programmes du secondaire ?

Il y a les racines n -ièmes de l'unité, la notion de groupe.

En dehors de la TS, peut-on faire un tel cours ailleurs ?

Pas en ES...je ne vois rien d'autre.

Comment est-ce que tout cela apparaît en TS ?

On va faire de la géométrie, des applications.

Et sinon ?

Des lieux.

Vous l'avez dit quand vous avez parlé de la spécialité en TS ?

Des rotations, similitudes.

2. Quelle est la forme d'une similitude ?

$z \mapsto az + b$ avec $a \neq 0$ si elle n'est pas constante, et $a = 1$ si c'est une translation.

Il y a également les similitudes indirectes, $z \mapsto a\bar{z} + b$ qui changent le signe des angles orientés.

Avec les complexes, on montre beaucoup de choses plus facilement, comme l'existence d'un centre.

3. Comme interprétation géométrique du module, le candidat a donné la caractérisation suivante d'un cercle de centre a et rayon r :

Interprétation géométrique : $\mathcal{C}_{a,r} = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| = r, a \in \mathbb{R} \text{ et } r > 0\}$.

Revenons à votre ensemble $\mathcal{C}_{a,r}$: est-ce que a est forcément dans $\mathbb{R}$?

Euh non, dans $\mathbb{C}$.

et un autre problème ?

Ah oui.

(le candidat corrige) $\mathcal{C}_{a,r} = \{M \in \mathcal{P} \text{ d'affixe } z, |z - a| = r, a \in \mathbb{R} \text{ et } r > 0\}$.

Il reste un problème logique.

...

Vous mettez a et r en indice, puis les définissez dans l'accolade !.

Ah oui !

Est-ce qu'on peut écrire proprement alors ?

4. Le candidat a écrit $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = z\bar{z}$.

Votre module de z , je suppose que c'est juste un oubli...

Ah oui !

5. Le candidat a donné, avec quelques précautions, la propriété suivante

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)$$

Est-ce qu'on peut faire autre chose ?

Les points A , B et C sont alignés si et seulement si $\frac{c-b}{c-a}$ est un réel.

On peut faire autre chose ?

...

En terme de cercles ?

Oui, ça décrit un cercle de diamètre AB .

Compléter.

6. Le candidat a écrit $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$.

Que pensez-vous de cette égalité sur l'argument ?

...

Est-ce que c'est une vraie égalité ?

7. Quelles autres équations peut-on résoudre avec les complexes ?

Par exemple celles du second degré...

Ok, pouvez-vous résoudre $\cos(3x) + \cos(2x) - \cos(x) + 1 = 0$?

J'aimerais utiliser les formules de Moivre si le moins n'était pas là.

C'est le moins qui vous gêne ? Essayer avec un plus à la place !

En posant $z = e^{ikx}$, et en utilisant la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique...

Au fait, quelles équations sait-on résoudre ?

Du deuxième degré, troisième degré avec les formules de Cardan...

Est-ce qu'on ne peut pas obtenir un polynôme en cosinus ?

Il faudrait bidouiller...

Par exemple $\cos(2x)$?

(Le candidat répond.)

Et pour $\cos(3x)$?

Je peux développer $\cos(3x) = \cos(2x + x) = \dots$

Ah non, c'est un peu longuet !

Avec une méthode dont vous avez parlé pendant l'exposé...

Ah, avec $\cos(3x) = \operatorname{Re}(e^{i3x}) = \operatorname{Re}((e^{ix})^3) \dots$

Dans le même ordre d'idée, comment calculer une primitive de $\cos^4(x)$?

(Le candidat explique.)

Comment ça s'appelle ?

(Le candidat répond.)

Et d'après vous, c'est enseigné dans quelles classes concernées par le programme du Capes ?

... ?

Je veux dire jusqu'en BTS ?

8. Est-ce que vous connaissez le théorème de l'angle au centre ?

Le candidat dessine un cercle de centre O et trois points A , B et M sur ce cercle. Il fait apparaître les angles AMB et AOB , et donne une relation entre ces angles.

Quelle hypothèse avez-vous faite ?

Que M intercepte le même arc que AB .

Qu'est-ce que ça veut dire ?

(Le candidat s'explique...)

Avez-vous une démonstration avec les complexes ?

Par exemple avec un repère, en prenant O comme origine du repère et avec $\overrightarrow{OM}$ un des vecteurs du repère...

Ok, juste les idées, il reste une minute.

♣ Et au delà du troisième degré, sait-on calculer les racines d'un polynôme ?

Une autre candidate présente le même exposé.

La première partie est une introduction : la candidate explique la genèse des ensembles de nombres jusqu'aux nombres complexes *inventés pour résoudre des équations*. La deuxième partie est intitulée *Module d'un nombre complexe*. La candidate énonce entre autre la propriété suivante :

Pour tous nombres complexes z et z' on a l'inégalité $||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$. La troisième partie est intitulée *Argument d'un nombre complexe*. On trouve la définition suivante :

L'argument d'un complexe z est défini comme n'importe quelle mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ avec I de coordonnées $(1, 0)$.

La candidate explique qu'elle n'écrit pas l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$ car *les élèves n'aiment pas les flèches sur les vecteurs*. Elle n'introduit pas le point M . Enfin, la quatrième partie de l'exposé s'appelle *lignes de niveau*. Comme exercice, la candidate propose d'étudier les lignes de niveaux de l'application $z \mapsto \arg(z - (2 + i))$.

Développement : Vous développerez l'inégalité triangulaire, puis la ligne de niveau de l'application $z \mapsto \arg(z - (2 + i))$.

1. Revenons sur la définition d'un argument : qu'est-ce que cet angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$?

C'est l'angle de vecteurs.

Qu'est-ce qu'un angle de vecteurs ?

...

Vous dites que c'est n'importe quelle mesure ?

...

Je suis un élève de TS, quand est-ce que je dois écrire modulo 2π ?

Est-ce que je peux expliquer sur un exemple ?

Oui, si vous arrivez à me convaincre.

La candidate explique en faisant des tours de cercle, et en évoquant l'image d'une ficelle.

Mais si j'écris argument de z égale $\frac{7\pi}{3}$, je dois mettre (2π) ou pas ?

Oui, tout le temps.

Alors qu'est-ce que ça veut dire être égal modulo 2π ?

...

Si on a z et z' d'argument $\frac{2\pi}{3}$, est-ce qu'on peut écrire argument de z égale argument de z' , ou est-ce qu'il faut rajouter modulo 2π ?

2. Vous avez esquissé le plan d'une partie exponentielle complexe. Vous avez dit que c'était pratique pour les calculs. Vous pouvez expliquer ?

La candidate répond en évoquant le lien avec les puissances réelles.

Ok : alors pour e puissance $i\theta$, qu'est-ce que ça veut dire ? Pourquoi pas 3 puissance $i\theta$? Ça marcherait aussi ?

...

Finalement, ça va bien au delà d'une notation ?

C'est la fonction exponentielle.

Qui va de quoi dans quoi ? Où est $i\theta$?

Imaginaire pure.

Comment peut-on définir la fonction exponentielle ?

C'est la solution de l'équation différentielle...

Ok : ça nous intéresse. Dites-nous comment on peut définir la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $e^{\alpha x}$.

C'est l'unique solution du système

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Sûre ?

Euh...oui...

Est-ce que vous pouvez vérifier que la fonction proposée est bien solution du système?

...La candidate essaie de vérifier le système, puis corrige.

Ok. Alors est-ce que vous voyez le lien entre ce qu'on vient de dire et ce qui précède ?

...

Sans se poser de grande question théorique, quelle équation vérifie $\theta \mapsto e^{i\theta}$?

$y' = \theta y$

Oh !

Euh, $y' = iy$ et $y(0) = 1$.

Et la fonction $g(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$?

$g'(\theta) = \sin(\theta) + i \cos(\theta)$.

Quelle est la dérivée de la fonction $\cos$?

3. On peut revenir à la ligne de niveau ?

Je voulais faire la recherche de la ligne de niveau $L(k) = \{M(z) \mid \arg(z - (2 + i)) = k \ (2\pi)\}$ avec $k = \frac{\pi}{6}$.

Vous avez situé cette dernière partie en BTS ? Vous savez à quoi ça peut servir ?

En électricité, pour les sinusoïdes. Mais je ne pourrai pas en dire plus.

Vous avez déjà entendu parler des diagrammes de Bode ?

Exposé 19. Exemples d'utilisations des nombres complexes.

Le candidat entame une longue introduction sur les nombres complexes et leurs propriétés. Au bout de neuf minutes, le jury lui rappelle qu'il lui reste six minutes. Le candidat propose alors des applications comme suit :

- formules de trigonométrie $\cos(\theta + \theta') = \dots$ et $\sin(\theta + \theta') = \dots$,
- conditions pour que 4 points soient cocycliques,
- transformations usuelles :
 - symétrie centrales $f : z \mapsto -z + 2\omega$,
 - similitudes directes quelconques $z \mapsto z' = ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega$,
 - réflexions de base $z \mapsto z' = \bar{z}$ et composition de la réflexion avec une rotation.

Développement. Pouvez-vous développer la partie cocyclicité ?

Le candidat place quatre points A, B, C et D sur un cercle puis écrit

$$(\widehat{AD}, \widehat{AC}) = (\widehat{BD}, \widehat{BC}) \quad (2\pi)$$

Après une suite d'égalités, il écrit et encadre : les points A, B, C et D sont alignés.

1. Est-ce que vous pouvez nous dire précisément quelle est la propriété que vous avez démontrée ?

J'ai voulu caractériser...

Mais est-ce que vous pouvez énoncer précisément cette propriété, comme devant des élèves ?

Il faut faire attention et bien expliquer...

Mais juste la propriété ?

...

Si je pars de votre tableau, on part de quatre points alignés et à la fin il est écrit qu'ils sont alignés ?

2. Comment on montre la cocyclicité ?

On écrit $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = r_2 e^{i\alpha}$, la forme trigonométrique.

La forme trigonométrique ?

...

Bon.

Puis on a $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = m \cdot r e^{i\alpha}$.

Est-ce que c'est évident qu'on a le même α ?

...

Est-ce qu'on peut revenir sur votre propriété ? D'abord est-ce qu'on a besoin du chapeau ?

Non.

Alors, quel est le résultat ? Il y a une erreur.

...

Une des situations n'est pas couverte.

3. Dans les rappels sur les modules et arguments, le candidat a écrit $|OM| = |z|$. Qu'est-ce que c'est $|OM|$?
 C'est $||\overrightarrow{OM}||$.
 Ca c'est une norme !
 On a $||\overrightarrow{OM}|| = |OM|$.
 Mais qu'est-ce qu'ils connaissent les élèves ?
 ...
 Au lycée, ou au collège ? On a deux points : A et B . Comment on note la distance de A à B ?
4. Comme le candidat a écrit dans ses rappels $(a + ib)^n = C_n^k \sum_{k=0}^n a^k (ib)^{n-k}$, le jury demande :
 Cette notation, C_n^k , vous en connaissez une autre ?
 Oui.
 Et sinon, quel est le problème ?
5. Qu'est-ce que ça veut dire réflexion de base ?
6. Le candidat dit que quand on compose une rotation et une réflexion, on obtient une réflexion.
 Sûr ?
 Non, une réflexion.
 Par quel argument vous rendez-vous compte que ça ne peut être une rotation ?
7. Est-ce qu'on peut utiliser les nombres complexes en dehors de la géométrie ?
 ...
 En analyse par exemple, on a des applications ?
 Pour la résolution d'équations différentielles, avec le polynôme caractéristique associé ?
 En effet... et pour le calcul d'intégrales ?
 Pour les intégrales trigonométriques.
 Par exemple ?
 Il écrit $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx$.
 Comment ça s'appelle ?
8. On peut reprendre l'exemple des rotations en géométrie ?
 Avec $M(z) \mapsto M(z') = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
 On a OMM' équilatéral. Le candidat une figure avec un repère $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
 C'est un repère particulier, ou quelconque ?
 C'est le repère canonique.
 Mais on a besoin que ce soit juste une base, ou d'autre chose ?
9. Est-ce qu'on peut énoncer un résultat du type ABC équilatéral si et seulement si ?
 Le candidat écrit $|z_C - z_A| = |z_B - z_A|$ et $(z_C - z_A) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$.
 Est-ce qu'on a besoin de deux égalités ?
 Le candidat en supprime une.
 Est-ce que ça n'en dit pas plus ?

Exposé 27 : Droites remarquables du triangle.

Les quatre parties de l'exposé sont intitulées *Les hauteurs*, *Les médianes*, *Médiatrice* et enfin *Bissectrices*.

Développement : concours des médianes, puis des hauteurs.

1. Lors du développement le candidat a écrit :

On note X tel que $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. La suite de questions commence par :

Quand vous écrivez $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, par quoi pouvez-vous remplacer X ?

...

Il n'y a pas un point particulier qui permettrait de bien écrire les choses ?

...avec les barycentres ?

Oui.

2. A propos des hauteurs, que savez-vous du symétrique de l'orthocentre H par rapport à la droite (BC) ?

...

Vous pouvez le tracer ?

Le candidat complète sa figure.

On peut faire la même chose avec les autres côtés ?

Oui...

Vous voyez où il peut être ?

Sur un cercle.

Oui, lequel ?

...

Tracer ce cercle...il passe par quoi ?

Par les côtés ?

... il passe par A , B et C ?

Quel est le nom de ce cercle ?

3. Est-ce qu'on peut revenir aux bissectrices ? Vous n'avez pas énoncé de propriétés ?

Elles se coupent en un point.

Oui...

...et ce point est le centre du cercle inscrit.

Est-ce que vous connaissez autre chose ? Tracer juste une bissectrice : est-ce qu'on a des relations métriques ?

...

Prolonger la bissectrice (AA') et placer les projetés de B et C dessus : on les nomme B' et C' . Est-ce que vous pouvez calculer le sinus de l'angle $\frac{\hat{A}}{2}$?

$\sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{CC'}{AC}$.

Est-ce qu'on peut le calculer d'une autre façon ?

Oui... $\sin\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right) = \frac{B'B}{AB}$, d'où l'égalité.

Et en partant du sinus de l'angle de mesure $\widehat{BA'B'}$?

Le candidat trouve $\frac{CC'}{CA'} = \frac{BB'}{BA'}$.

Qu'est-ce qu'on peut en déduire ?

4. Est-ce qu'il y a des propriétés métriques avec les médianes que vous connaissez ?

Ah oui, le théorème de la médiane.

Alors ?

$$AB^2 + AC^2 = \frac{AI^2}{2} + BC^2.$$

Comment on le montre ?

Le candidat explique.

Et une relation du même genre avec un signe moins ?

Exposé 36 : Homothéties et translations.

Le candidat a expliqué que le cadre de l'exposé est un espace affine euclidien orienté E de dimension 2 ou 3. La première partie de l'exposé est intitulée *Translations*. La deuxième partie est intitulée *Homothéties*. La définition d'une homothétie de centre O et de rapport k est donnée dans le cas où $k \in \mathbb{R}_+^*$. La première proposition de l'exposé assure que *le centre d'une homothétie est le seul point invariant quand $k \neq 1$.*

La deuxième proposition assure que si trois points O , M et M' sont alignés, il existe une homothétie de centre O qui transforme M en M' . Un exemple est alors donné, avec O l'origine du repère, M' de coordonnées $(-2, 0)$ et M de coordonnées $(5, 0)$. La troisième proposition est ainsi énoncée :

Soit (d_1) et (d_2) sont deux droites sécantes en A . Si deux droites parallèles intersectent (d_1) en B et D , puis (d_2) en C et E , alors il existe k tel que

i) $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$

ii) $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}$

iii) $\overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{BC}$

Réciproquement, s'il existe k tel que i) et ii) soient vérifiés, alors iii) est vérifié.

La troisième partie de l'exposé est intitulée *Applications*. Deux théorèmes donnent une interprétation respectivement des translations et des homothéties en termes de nombres complexes.

Développement : On demande au candidat de démontrer les propositions de sa deuxième partie.

1. Revenons sur la définition d'homothétie. Votre k ?

Oui, $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Est-ce qu'on peut revenir à votre exemple alors ?

La candidate étudie l'exemple.

Alors, est-ce qu'on peut revenir à votre définition ?

2. Pour démontrer la troisième proposition, le candidat a introduit une homothétie $h_{A,k}$ qui transforme B en D (en s'appuyant sur la deuxième proposition). Il pose $C' = h_{A,k}(C)$, et essaie d'en déduire que $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.

Est-ce qu'on peut revenir à votre démonstration de la troisième proposition ?

Pourquoi est-ce que iii) implique que $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires ?

Car $C' = E$.

Mais pourquoi vous l'appellez C' si c'est E ?

Car je veux montrer que $C' = E$.

Donc on ne le sait pas encore en cet instant !

3. Qu'est-ce qu'on peut dire de la composée de deux homothéties ?

Le candidat explique avec une figure, mais ne démontre pas.

Dans vos applications, vous avez parlé de l'interprétation en termes de nombres complexes : est-ce qu'on peut l'utiliser ?

Le candidat écrit alors : $h_{\omega_1, k_1} : z' - \omega_1 = k_1 z$.

Vous êtes sûr ?

$$h_{\omega_1, k_1} : z' - \omega_1 = k_1(z - \omega_1)$$

Ok...

$$h_{\omega_2, k_2} : z' - \omega_1 = k_2(z - \omega_2)$$

$$h_1 \circ h_2(z) = h_2(\omega_1 + k_1(z - \omega_1)).$$

Attendez, vous faites $h_1 \circ h_2$?

Le candidat reprend, mais se perd dans ses calculs.

Alors, est-ce qu'on peut l'écrire sous la forme $h_2 \circ h_1(z) = \alpha z + \beta$? Est-ce que vous pouvez juste déterminer α ?

$$\text{On a } z'' = k_1 k_2 z + \omega_3.$$

Qu'est-ce qu'on peut dire alors ?

Que c'est une composée d'homothéties.

On fait des composées d'homothéties depuis longtemps maintenant !

...

Qu'est-ce que c'est alors ? Est-ce que ça peut être une homothétie ?

Oui, si $k_1 k_2 \neq 0$.

Tout à l'heure, vous avez donné l'écriture d'une translation, en termes de nombres complexes. Est-ce que ça peut arriver ici ?

...oui, si $k_1 k_2 = 1$.

Alors : si $k_1 k_2 = 1$, c'est une translation. Sinon ?

Ce n'est pas une translation.

4. Vous avez dit que quand on se donne trois points alignés O , M et M' , alors il existe une homothétie de centre O qui transforme M en M' . Si je prends $M = 0$ et M' distinct de O , quelle homothétie fonctionne ?

5. Qu'est-ce que vous appelez une transformation ?

Une fonction du plan dans le plan, et qui soit bijective.

Est-ce que vous avez des exemples de fonctions du plan dans le plan, et qui ne soient pas des bijections ?

La symétrie orthogonale.

En quoi ce n'est pas une transformation ?

Elle n'est pas bijective.

Elle n'est pas bijective ?

Je voulais dire la projection orthogonale !

6. Placer sur une droite quatre points O , A , B et C . Pouvez-vous construire l'image de C par l'homothétie de centre O qui transforme A en B ?

On peut essayer de voir le rapport.

Oui, c'est déjà bien. Mais une vraie construction ?

...

Si à la place de D on prend I en dehors de la droite ?

Le candidat trouve une construction.

Alors l'image de C !

Exposé 43 : Suites arithmétiques, géométriques.

Développement : Développer la partie suite suites géométriques, avec les démonstrations.

1. Revenons sur le calcul de la somme des termes d'une suite géométrique, que vous n'avez pas réussi à établir.

...

Combien il y a de termes dans votre somme $u_n + qu_n + \dots + q^{p-1}u_n$?

...

Comment aider un élève à compter ces termes ?

2. Pour cette somme, vous avez écarté le cas $q = 1$, quelle est la somme dans ce cas ?

3. Vous avez évoqué rapidement plusieurs façons de démontrer l'inégalité de Bernoulli, est-ce que vous pouvez préciser ?

Par récurrence ?

Vous pouvez le faire ?

Alors on veut montrer que $(1+a)^n \geq 1+na$.

Vous pouvez préciser ? Qui est a ?

...

Est-ce que c'est tout ?

On fait l'initialisation : pour $n = 1$ on a...

Mais quel est le premier entier pour lequel vous avez énoncé votre propriété ?

$n = 0$. (La candidate écrit alors ce qui suit au tableau :)

- Initialisation $n = 0$

- $(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n$

$\Leftrightarrow (1+a)^{n+1} \geq (1+a)(1+na)$

Or $(1+a)(1+na) = 1+na+a+na^2$

$\geq 1+(n+1)a$

Ainsi $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$.

Une copie d'élève qui ferait ça aurait tous les points ? Il aurait fini sa démonstration par récurrence ?

...

Un élève demande pourquoi on a $(1+a)^n \geq 1+na$, alors que c'est ce que qu'on veut démontrer ?

C'est l'hypothèse de récurrence.

Mais comment l'élève le sait ?

On peut le rajouter.

Mais c'est facultatif ou pas ?

La candidate rajoute : Soit $\mathcal{P}(n) : "(1+a)^n \geq 1+na"$.

Est-ce que ça suffit ? Qu'est-ce qu'il faut rajouter sur l'hérédité ?

Vous voulez dire : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$?

Oui ! Et où écrivez-vous la définition de $\mathcal{P}(n)$?

4. Quel est le comportement des suites géométriques de raison $q < -1$? Par exemple $(-2)^n$?

Les termes sont une fois positifs, une fois négatifs, donc ça diverge.

Comment expliquer à un élève ?

Avec un tableau, c'est assez convaincant. Sinon, ils ont les suites extraites.

Qu'est-ce qu'ils ont aussi, quand même ?

5. Le premier exemple donné pour introduire les suites de l'exposé exploite une construction géométrique : un les côtés perpendiculaires d'un triangle rectangle ont pour mesure 1 et 2. A partir de l'hypoténuse, on construit un autre triangle rectangle en rajoutant un côté de mesure . On poursuit la construction et on note A_n la longueur du côté construit à l'étape n . On pose alors $u_n = A_n A_{n+1}^2$, et on demande une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n .

Je ne comprends pas votre premier exemple ?

6. Vous avez proposé comme application les suites arithmético-géométriques. Vous pouvez nous expliquer ?

La candidate donne la définition.

Quelle est la méthode pour étudier ces suites ?

On peut chercher le point fixe de cette suite pour se ramener à une suite géométrique.

Je ne vois pas ce point fixe ?

...

Est-ce qu'il est toujours défini ?

Oui, c'est $\frac{b}{1-a}$.

C'est toujours défini $\frac{b}{1-a}$?

Si $a \neq 1$.

Alors comment on fait ?

On a $u_{n+1} = au_n + b$ et $l = al + b$, donc $u_{n+1} - l = a(u_n - l)$, donc la suite $u_n - l$ est géométrique de raison a .

Est-ce envisageable en Terminale S, ainsi ?

Non, on leur fait trouver la suite $u_n - l$.

7. Vous avez écrit, si u_n est affine, alors elle s'écrit sous la forme $u_n = a + nq$. Est-ce qu'il y a une réciproque ?

Oui.

Pourquoi ?

La candidate explique.

Alors, est-ce qu'on peut énoncer autrement votre propriété ?

Oui...

Comment vous l'expliqueriez, graphiquement, à un élève ?

♣ Finalement, si les termes d'une suite réelle sont successivement strictement positifs et strictement négatifs, peut-on affirmer que cette suite diverge ?

L'exercice

- 1) Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$$

- 2) Pour tout nombre entier naturel n non nul, on considère l'expression :

$$P_n = \frac{n^2+1}{n^2} \times \frac{n^2+2}{n^2} \times \dots \times \frac{n^2+n}{n^2}$$

- a) En utilisant le résultat obtenu à la question 1), démontrer que pour tout nombre entier n non nul, on a :

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} < \ln(P_n) < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

On admettra que $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- b) Prouver que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

La solution proposée par un élève à la question 1)

Pour tout $x > 0$, soit $g(x) = x - \frac{x^2}{2}$, $h(x) = \ln(x+1)$, $f(x) = x$.
Par conjecture, avec la calculatrice, on a visiblement :

$$g(x) < h(x) < f(x)$$

Déterminons la position de la courbe g par rapport à celle de h :

$$g(x) - h(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(x+1)$$

J'ai beau chercher, je n'arrive pas à démontrer que cette expression est négative, nous allons donc l'admettre.

Soit $x > 0$, $x+1 < e^x$ car e^x croît plus vite que x .
donc $\ln(x+1) < \ln(e^x)$ c'est à dire $\ln(x+1) < x$.

Le travail à exposer devant le jury

- 1- Quelles sont les connaissances et compétences mises en jeu dans cet exercice ?
- 2- Analysez la production de l'élève du point de la démarche et du point de vue de la rédaction.
- 3- Exposez une correction de la question 2)b) comme vous le feriez devant une classe de terminale scientifique.
- 4- Présentez deux ou trois exercices conduisant à l'étude de suites numériques par diverses méthodes.

Exposé du cas

Parmi les *indicateurs pour le pilotage des établissements du second degré* (IPES) d'un lycée on trouve à la rubrique « Devenir des élèves de seconde » le tableau suivant.

	Établissement		Académie	France
	effectif	pourcentage		
1 ^{re} S	64	20,6%	31,5%	30,7%
1 ^{re} L	38	12,2%	10,5%	9,2%
1 ^{re} ES	71	22,8%	19,1%	18,7%
1 ^{re} STG	62	19,9%	13,6%	15,0%
1 ^{re} STI	4	1,3%	7,3%	6,7%
BEP CAP	2	0,6%	0,7%	0,8%
Redoublants	47	15,1%	10,5%	11,2%
Baccalauréat professionnel	2	0,6%	2,6%	2,4%
Sorties du système	21	6,8%	3,6%	4,8%

Par ailleurs, 7,3% des élèves de seconde de ce lycée appartiennent à une catégorie socioprofessionnelle défavorisée, contre 20,8% pour l'académie et 24,6% pour la France.

Question

Après avoir analysé les données de ce tableau, indiquez les propositions que pourrait faire le conseil pédagogique de ce lycée afin de faire évoluer certains des indicateurs relatifs à l'orientation des élèves.

Documentation fournie avec le sujet

Circulaire n° 2011-071 du 2 mai 2011 : préparation de la rentrée 2011, NOR : MENE1111098C

[...] Réforme du lycée et orientation

La prise en charge individualisée des élèves se construit au travers de l'accompagnement personnalisé, du tutorat, des stages passerelles et des stages de remise à niveau. Dès la seconde, la liaison avec l'enseignement supérieur et la préparation de l'insertion professionnelle intègrent l'orientation active et la procédure d'admission post-bac. Les autorités académiques veillent à ce que les échanges d'informations entre équipes éducatives des lycées et professionnels de l'enseignement supérieur se développent. Les centres d'information et d'orientation facilitent la mise en cohérence des actions portées par les établissements (forums, conventions, information des équipes, actions conjointes avec les universités, etc.), en particulier lors des temps forts du parcours. Le service dématérialisé mono-orientationenligne.fr, proposé par l'Onisep, contribue à faciliter l'accès à l'information. [...]

Dossier : Suites numériques et orientation des élèves.

1. Revenons sur les compétences.

En fait j'ai plutôt l'habitude des savoirs et méthodes.

Qu'est-ce qu'on peut dire d'autre, par rapport à ce que vous avez dit ?

Il y a par exemple la prise d'initiative.

2. Finalement, c'est un bon travail ou pas ? Quelle note vous lui mettriez ?

Ce n'est pas fini, mais il y a de bonnes choses...

Par exemple le fait de comparer la croissance de x et e^x ?

...

Son raisonnement, il est juste ou il est faux ?

Non, il manque des justifications.

Et alors ?

Il manque en 0, il faudrait la limite.

Peut-on préciser ?

La candidat précise le comportement en 0.

Finalement, son argumentation est juste ou fausse ?

3. Je voudrais revenir sur ce que vous avez dit en parlant de la production de l'élève : la conjecture est une perte de temps.

Normalement il n'a pas à le faire : on lui demande de démontrer.

Dans quel cas il peut avoir à conjecturer ?

...?

Quel type de question amène à conjecturer ?

Il y a les questions fermées par oui ou par non.

Ca c'est une question fermée ?

...

Une question fermée c'est plutôt une question dont on donne la réponse.

4. Si on vous écoute, la seule façon de se sortir de la première question, c'est de dériver ?

...

Est-ce qu'on ne peut pas faire autrement, sans dériver ?

...

Avec une propriété importante ?

...

Si $f \leq g$, est-ce qu'on peut en déduire que $\int_a^b f \leq \int_a^b g$?

Il faut que f et g soient continues et positives.

La positivité est-elle nécessaire ?

Le candidat écrit alors au tableau

$$\text{Si } 0 < f < g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

A-t-on des conditions sur a et b ?

Le candidat répond.

Est-ce qu'on garde la positivité alors ?

Le candidat répond.

Pour l'hypothèse, l'inégalité stricte est-elle nécessaire ?

5. Pour le passage à l'exponentielle, que faut-il préciser ?

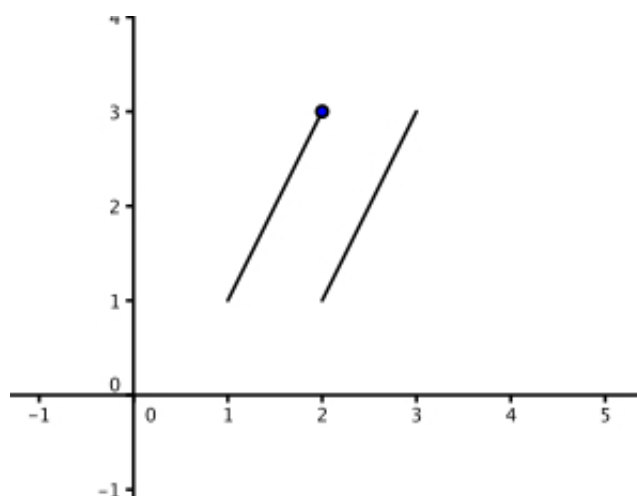
La croissance de la fonction exponentielle, et la continuité.

Pourquoi la continuité ?

Ca sert à garder l'ordre.

Sinon ça ne marche pas ?

Je propose un contre exemple.



Pour vous elle est croissante ?

6. A-t-on toujours, si une suite (u_n) converge vers un réel l , que la suite $f(u_n)$ converge ?

7. Pour son deuxième exercice le candidat a oralement évoqué le flocon de Van Koch.

Est-ce qu'on peut reprendre vos choix d'exercices ? Ils sont donnés tous les deux en Terminale S ?

Non, Van Koch, c'est en BTS.

Est-ce que vous pouvez nous expliquer Van Koch ?

Le candidat commence à dessiner un tout petit triangle, on distingue mal.

Est-ce que vous pouvez faire un triangle plus grand ?

Le candidat reprend sa figure.

Qu'est-ce qu'on fait calculer ?

La suite (a_n) des périmètres.

Qu'est-ce qui est intéressant dans cet exercice ?

...

Vers quoi tendent les suites des aires et des périmètres ?

Le candidat donne la réponse.

Est-ce que c'est intéressant ?

...

C'est un devoir dirigé ou autre chose ? Comment vous le donnez ?

Je préfère le donner à la maison.

Vous préférez donner ce qui est plus dur à la maison ?

Ils peuvent échanger à la maison.

Pas en classe ?

8. Est-ce qu'on peut utiliser l'outil informatique ?

...

Le tableur par exemple ?

Partie agir en fonctionnaire de l'état :

1. D'après vous, le problème, c'est les vœux des élèves qui souhaitent aller en S alors qu'ils ne peuvent pas ?

...

Le problème ne pourrait-il pas venir du lycée plutôt que des élèves ?

Je pense qu'il faudrait ouvrir une classe de S ?

Mais comment est-ce que ça marche ?

2. Vous voyez ce qui se passe ? C'est un lycée favorisé ?

...

Regardez le taux de redoublement.

Il est fort.

Dans un lycée favorisé.

Alors peut-être alléger le passage en S.

Que voulez-vous dire ?

Baisser les exigences.

Qui les fixe ces exigences ?

Le principal.

Sur quoi il se base ?

Sur les professeurs.

3. Pourquoi on parle du conseil pédagogique ?

...

Qu'est-ce que c'est ?

4. Qu'est-ce qu'on peut revoir ?

La façon de faire les cours.

Pourquoi ?

La plupart des élèves de ce lycée ne sont sans doute pas des surdoués.

Il faut être surdoué pour faire S ?

...

Qu'est-ce qu'on peut changer dans les cours ?

5. Que faites-vous des élèves qui atteignent trop facilement les objectifs ?

...

Si quelqu'un attend plus d'un apprentissage ?

Un deuxième candidat passe le même jour. Il propose deux exercices :

Exercice 1 : Etude de la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. Après avoir écrit ceci, il précise oralement qu'après avoir travaillé en cours le lien entre les fonctions et les suites $u_{n+1} = f(u_n)$, les élèves peuvent résoudre l'exercice.

Exercice 2 : Sans l'écrire, le candidat évoque la méthode d'Archimède : des suites réelles (p_n) et (q_n) correspondant aux périmètres des polygones inscrits et exinscrits à 2×2^n côtés. Il écrit ensuite au tableau les expressions de p_n et q_n à retrouver.

1. Revenons sur ce que vous avez dit : que l'élève ne devrait pas prendre sa calculatrice et conjecturer, mais accepter ce qu'on lui demande de faire. Est-ce qu'il ne devrait pas avoir l'esprit critique ?

2. Vous avez dit : il aurait du dire on définit les fonctions f , g et h pour tout x strictement positif.

Non, pour tout x strictement positif on définit les fonctions f , g et h .

Comment aurait-il fallu l'écrire à la classe ?

3. Vous avez dit qu'il pouvait utiliser $\frac{x+1}{e^x} = 0$.

Je parlais de limite.

Est-ce qu'on peut reprendre la réponse de l'élève ?

4. L'expression "la courbe g " est-elle correcte ?

Il a mis $x \mapsto e^x + 1$.

Mais la façon de dire est-elle correcte ?

...

Alors reprenons la démarche de l'élève.

5. Avec cet exercice, quelles capacités pouvez-vous évaluer ?

L'autonomie.

Alors c'est bon ?

Non, je n'aurais pas proposé les mêmes fonctions.

D'après vous, l'élève qui a écrit cette copie montre ou pas les capacités que vous voulez évaluer ?

6. Regardons l'exercice avec la suite récurrente.

Alors je fais l'étude de f , je...

Faites l'étude comme devant une classe.

La suite est définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

Comment calculez-vous u_1 ?

Le candidat corrige, puis écrit $f : x \mapsto \sqrt{x + 6}$. $D_f =$.

(Le candidat s'arrête et demande alors s'il doit tout écrire.)

Comme à une classe, si vous pensez que c'est nécessaire.

Pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+6}}$.

Pour tout $x \in D_f$?

...

La fonction racine est dérivable en 0 ?

En effet, si $x = -6$, alors $f'(-6)$ n'existe pas.

Est-ce que cette justification vient après ?

Pour tout x de $D_f \setminus \{-6\}$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur D_f .

Sur D_f ou sur $D_f \setminus \{-6\}$?

D_f .

Pourquoi ?

Car $f(-6) = 0$.

Qu'est-ce que ça permet de dire la continuité de f ?

Euh... (Rires)

Bon, vous l'avez dit.

7. Pouvez-vous montrer que (u_n) est majorée ?

Par récurrence.

Allez-y.

On suppose $u_p \leq 3$, puis on a $\sqrt{u_p + 6} \leq \sqrt{3 + 6}$.

Je ne comprends pas ce qui se passe là.

La fonction racine est croissante.

Croissante sur quoi ?

Le candidat répond.

...

Vous utilisez aussi que $u_p \geq 0$. Est-ce qu'il ne faudrait pas en parler quelque part ?

...

En fait bien plus tôt, avant de montrer la croissance, de quoi aurait-il fallu s'assurer ?

De l'existence ?

Et qu'est-ce qui assure cette existence ?

Partie agir en fonctionnaire de l'état :

1. Vous avez cité parmi les acteurs les CIO, le conseiller d'orientation, vous n'avez pas cité le professeur. Est-ce que c'est son rôle ?

Il peut informer, mais il doit diriger vers des personnes qui connaissent mieux la question.

2. Est-ce qu'il y a des heures de prévu ?

Des heures avec le prof principal.

Et autre choses ? Quelque chose qui vient d'être mis en place ?

...

Vous avez parlé des heures d'accompagnement personnalisé. Qu'est-ce que c'est ?

...

Est-ce que c'est obligatoire, et qui intervient ?

...

Est-ce qu'il y en a au collège ?

...

Comment s'appelle ce dispositif ?

...

Dans l'accompagnement, peut-on faire autre chose que de l'aide au devoir ?

3. Vous avez parlé de décalages dans les statistiques. Qu'est-ce qui se passe et qu'est-ce qu'on peut proposer ?

C'est un lycée aisé, or il y a un faible nombre de passages en Première scientifique.

Alors ?

Une famille de médecins peut mettre la pression aux enfants pour qu'ils passent en S : les parents les feraient redoubler pour qu'ils n'aillent pas en STI.

A quel type d'étude mènent les filières STI ?

...

Et que dire des STG ?

4. Vous avez cité la pression des parents pour l'orientation. Concernant l'orientation en Première S, quel peut également être l'impact des parents ? Quels types de raisonnement peut, ou pas, conduire à ces résultats ?

Un troisième candidat traite ce dossier :

1. Précisément, quand avez-vous utilisé l'égalité donnant la somme des entiers de 1 à n ?

Le candidat écrit

Pour tout entier naturel n on a

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^2} \leq \ln(P_n) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

C'est vrai pour tout entier naturel ?

2. Dans la correction proposée par le candidat, le candidat a écrit

D'après le théorème des gendarmes, nous avons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(P_n) = \frac{1}{2}$.

D'après le théorème sur les composés de limites, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = e^{\frac{1}{2}}$.

Revenons sur votre correction : vous dites que vous utilisez des théorèmes, mais il faut en vérifier les hypothèses ?

...

Est-ce que vous pouvez en vérifier proprement les hypothèses ?

3. Est-ce que vous pouvez résoudre la question 2 de l'exercice du jury ?

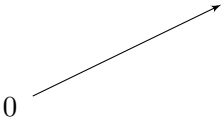
Pour $x > 0$ posons $g(x) = \ln(x+1) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$. g est dérivable car $x - \frac{x^2}{2}$ est polynomiale et $x \mapsto \ln(x+1)$ est dérivable.

Est-ce qu'on peut le dire de façon plus ramassée ?

...

Ok, reprenons.

Alors on a $g'(x) = \dots = \frac{x^2}{1+x}$, donc $g'(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors le tableau de variation suivant

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	0	

Vous travaillez sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_+$?

Rien ne nous empêche de travailler sur $\mathbb{R}_+$.

Que vaut $g'(0)$?

Le candidat rajouter une ligne verticale barrée d'un zéro dans la ligne donnat g' .

Quand on indique + dans un tableau de signe, c'est strictement positif ou positif ?

Strictement positif, donc il faut indiquer.

Alors le signe de g ?

Sur $[0, +\infty[$, g va être croissante donc positive, mais sur $]0, +\infty[$ elle va être strictement positive.

Pourquoi ? Comment le feriez-vous écrire à un élève de Terminale S, si vous pensez qu'il y a quelque chose à dire en Terminale S ?

...

Il y a un argument clé.

...

Elle est juste croissante la fonction ?

Strictement croissante ?

C'est important ?

Oui.

Alors, est-ce qu'on peut rédiger tout ça ?

5. Le candidat a précisé lors de son exposé que l'élève avait perdu du temps en conjecturant.

Vous avez dit que l'élève avait perdu du temps en conjecturant ?

...

Ce type d'inégalité, est-ce que c'est intéressant ? Quelle est la problématique sous-jacente ?

6. Revenons au raisonnement de l'élève : il dit que e^x croît plus vite que x , donc que $e^x > x$. Quel est le problème ?

Il ne précise pas assez ?

Mais quel est le problème ?

Ca va être vrai à partir d'un certain rang.

Ah ! C'est local !

7. Le troisième exercice proposé par le candidat est le suivant :

Approche d'un réel par dichotomie.

Résoudre $x^3 + 2x - 1 = 0$.

1) Existence d'une solution unique sur $[0, 1]$.

2) Déterminer une valeur approchée de ce réel.

Revenons sur l'exercice 3 : expliquez-nous.

Je détaille ?

Non, les grandes lignes.

Le candidat explique : il parle en particulier du théorème des valeurs intermédiaires et des deux suites adjacentes qu'il faut considérer.

La convergence de ces deux suites adjacentes, vous l'avez prouvée ?

Non.

Expliquez-nous.

... et on va utiliser le test si $f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right) f(u_n) < 0$, alors...

Est-ce que c'est vraiment la peine de faire le produit ?

Ca permet de déterminer le signe.

Est-ce que c'est possible sans faire le produit ?

...

Sinon vous allez faire des produits inutiles : ce n'est pas bon pour l'algorithme ?

...

De toute façon, vous leur expliquez comment aux élèves, la signification de ce test avec un produit ?

Partie agir en fonctionnaire de l'état :

1. Est-ce que vous ne mélangez pas filière professionnelles et technologiques ?

Regardez les résultats ?

Oui, j'ai fait un mélange.

Oui, il y a une erreur d'analyse, car il est très bas ce chiffre de 0,6%. Et comment faire pour remonter ce taux ?

Leur parler de l'emploi ?

Est-ce qu'il y a un dispositif de valorisation de cette filière ?

2. En regardant le tableau : est-ce que les résultats du lycée sont bons ?

Si on regarde le taux de en Seconde.

Il n'y a pas que ça.

... Quelque chose doit vous interpeller : quel est le taux en filières scientifiques ?

Il remonte.

Est-ce que c'est bien ?

Non, mais c'est compensé par les L.

3. Vous avez parlé du tutorat ? Vous pouvez développer ?

4. Vous avez parlé d'aide individualisée ?

C'est quelque chose en place depuis plusieurs années, mais c'est appuyé...

Et au lycée ?

5. Qu'est-ce qu'il peut y avoir d'autre ?

...

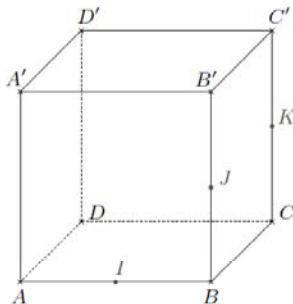
C'est soufflé...le conseil pédagogique ?

...

Sinon...un indice fort : le taux de passage en Première S : ça veut dire que les professeurs sont très exigeants.

L'exercice

Soit $ABCD A' B' C' D'$ un cube. I , J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[BB']$ et $[CC']$.



Indiquer pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

- 1) Les points I , J et K sont alignés.
- 2) Les droites (AC) et $(A'K)$ sont sécantes.
- 3) Les droites (IJ) et $(A'D')$ sont parallèles.
- 4) Les droites (AJ) et (DK) sont parallèles.

La réponse d'un élève

- 1) Les points I , J et K ne sont pas alignés car ils n'appartiennent pas tous au même plan.
- 2) Les droites (AC) et $(A'K)$ sont sécantes car elles ne sont pas parallèles.
- 3) D' n'est pas sur la face $ABA'B'$ donc les droites (IJ) et $(A'D')$ ne peuvent pas être parallèles.
- 4) Les droites sont parallèles car elles appartiennent à deux plans parallèles.

Le travail à exposer devant le jury

- 1- Analysez les réponses de l'élève aux questions 1), 2) et 3).
- 2- Proposez une correction de la question 4) telle que vous la présenteriez en classe de seconde.
- 3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème « géométrie dans l'espace » dont l'un au moins vise à remédier aux difficultés de l'élève.

Exposé du cas

Vous prenez connaissance du projet d'établissement du lycée dans lequel vous venez d'être affecté(e). Un des axes de ce projet concerne la promotion de l'orientation des jeunes filles vers les filières et carrières scientifiques et technologiques.

Question

Quelles actions l'équipe des professeurs de mathématiques peut-elle proposer dans ce cadre ?

Documentation fournie avec le sujet

Présentation du plan sciences et technologies à l'école (dossier de presse, 31 janvier 2011)

[...] Aujourd'hui les filles représentent 57,8% des bacheliers généraux et 52,6% des bacheliers technologiques, toutes séries confondues. Mais les statistiques montrent que la mixité résiste mal à l'orientation. En effet, filles et garçons n'investissent pas les mêmes filières, pour des raisons psychologiques et sociales. Seulement 39% des élèves de terminales scientifiques et technologiques (S, STL, STI) sont des filles. Cette situation se prolonge après le baccalauréat : dans les classes préparatoires aux grandes écoles, 75% des élèves des filières littéraires sont des filles, 30% des élèves des filières scientifiques et seulement 26% des diplômes d'ingénieurs sont délivrés à des femmes. [...]

Dossier : Géométrie dans l'espace et orientation des jeunes filles.

Les deux exercices proposés par le candidat sont les suivants :

Exercice 1 : SABCD est une pyramide régulière de base carrée de centre O et de sommet S. Les dimensions et une figure sont données.

1) Calculer la hauteur.

2) On considère $I \in SA$ tel que $SI = 4$. Le plan parallèle à ABCD et passant par I coupe SB, SC et SD en J, K et L. Calculer les longueurs IJ, JK, SI, SJ, ...

Exercice 2 : La proposition suivante est-elle fausse ?

Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont perpendiculaires.

1. L'énoncé vous demandait d'aider l'élève... et chez vous ?

...

Alors ?

Une des difficultés c'est de comprendre qu'on est dans l'espace... Mon deuxième exercice aide à le faire comprendre.

C'est donc votre deuxième exercice qui répond à cette commande ?

Oui.

Par exemple dans la question 1, est-ce qu'il pense qu'il n'est pas dans l'espace ?

...

Car vous avez dit qu'une des difficultés était de comprendre qu'on était dans l'espace ?

...

Comment auriez-vous rédigé cette question ?

2. Est-ce qu'une droite incluse dans un plan est parallèle à ce plan ?

3. Dans la réponse de l'élève, est-ce qu'il a compris qu'il est dans l'espace ?

Oui.

Qu'est-ce qui manque ?

De la précision.

Oui : vous devriez préciser également dans vos réponses.

4. Si vous aviez huit points, quatre fois deux points, à attribuer à l'élève, comment le feriez-vous ?

...

Alors ?

Sur la question 3, je n'ai pas compris ce qu'il veut dire.

5. Revenons dessus alors...

6. Revenons à la question 4 : vous avez dit que si deux plans sont parallèles, alors toute droite contenue dans l'un est parallèle à toute droite contenue dans l'autre.

Oui.

Est-ce que c'est vrai ?

...

Quelle est votre définition de deux droites parallèles ?

Que les vecteurs sont colinéaires.

En seconde ?

Non...confondus...

Deux droites confondues sont-elles parallèles ?

Elles sont coplanaires ?

Il faut le dire entièrement !

...

Vous voulez dire : deux droites parallèles sont soit...allez, complétez !

Revenons à ce que vous avez dit au début sur les droites parallèles : pouvez-vous donner un contre-exemple ?

7. Dans votre premier exercice, vous avez dit que la hauteur est SO . Qu'est-ce qui permet de l'affirmer ?

Les propriétés des pyramides régulières.

Comment peut-on compléter l'exercice ?

Avec le volume.

Comment peut-on calculer le volume ?

8. Essayer de résoudre votre deuxième exercice.

La candidate lit ses notes.

Est-ce que vous avez besoin de vos notes ?

Partie agir en fonctionnaire de l'état :

1. En Terminale S, des filles ont de bonnes notes, et d'autres de moins bonnes.

Une a 10, et dit qu'elle se voit bien faire médecine. Quels arguments peut-on lui donner pour lui faire comprendre que les filières scientifiques sont également ouvertes ?

Parler de la relativité d'une note.

Elle veut faire médecine, je voulais dire que peut-être elle pourrait faire ingénieure ?

...

Est-ce que vous connaissez les statistiques ?

En école d'ingénieurs, avec 10, il va falloir redoubler. Ce sera dur.

Plus dur que médecine ?

2. Vous avez dit que 39% des élèves en Terminale S sont des filles, qu'est-ce qui vous permet de dire ça ?
La documentation.
Sûre ?

3. Dans votre exercice quotidien, que pouvez-vous faire pour aller dans le sens du projet d'établissement ?
...
Dans la pratique ?

4. Un élève rapporte qu'un collègue dit que physiologiquement, le cerveau des filles est plus fait pour les matières littéraires que scientifiques. Quelle réponse faites-vous à cet élève ?
Il y a peut-être des études qui prouvent que c'est vrai, mais je ne le dirai pas...
Est-ce que votre collègue a le droit de tenir ces propos ?

5. Il y a 25% d'hommes en khagne, les classes préparatoires littéraires. Pourquoi on s'en préoccupe moins ?
Car c'est moins prestigieux.

Un autre candidat passe sur ce dossier :

1. Vous avez dit que $AJKD$ est un parallélogramme : est-ce qu'on peut préciser ?
 $AJ = AB$ et $JK = AB$, et on sait qu'on n'a pas un carré, par Pythagore, et qu'on a des angles droits, donc on a un rectangle.
Démontrer que les angles sont droits.
On va le faire pour un, on admettra pour les autres.
Est-ce qu'on a besoin de le faire pour les autres ?
Non, car c'est un parallélogramme...(le candidat explique)...et la face $A'B'C'$ est orthogonale à la face...(on le coupe)
Alors, orthogonale ou perpendiculaire ?
...
Qu'est-ce que ça signifie que deux plans sont perpendiculaires ?
Que toute droite de l'un est perpendiculaire à toute droite de l'autre
Sûr ?
...
Un exemple ?
Le candidat trace deux plans : on distingue assez mal.
Avec un cube ?

2. Est-ce qu'on peut définir une droite perpendiculaire à un plan ?

Cette droite est perpendiculaire à toutes les droites du plan.

Est-ce qu'on ne peut pas donner quelque chose de plus faible ?

Il suffit que la droite soit perpendiculaire à deux droites.

Il faut rajouter quelque chose.

3. Pourquoi les droites JK et BC sont parallèles ?

C'est une propriété.

Ce n'est pas un résultat du cours. Pouvez-vous le démontrer ?

...en faisant apparaître des rectangles ?

Comment le faire ?

...

Citer la propriété utilisée.

Si deux segments parallèles sont de même longueur, ils forment un carré.

Alors si je prends $JKBC$...

Il faut qu'il soit convexe.

Est-ce qu'on peut reprendre précisément cette propriété alors ?

4. Que donneriez-vous comme réponse à la question deux ?

...

Pourriez-vous préciser ce qui dans votre exercice permet de remédier aux difficultés de l'élève ?

...

Vous avez proposé un logiciel de géométrie dans l'espace, est-ce que vous voyez autre chose pour ceux qui ont des difficultés ?

Le logiciel est tellement complet que je ne vois pas comment...

Pour quelqu'un qui aurait des difficultés à se repérer dans l'espace, de manière concrète ?

En travaillant avec un objet, un cube, un dé ?

Oui !

...

Est-ce qu'il n'y a pas des outils au collège ?

Partie agir en fonctionnaire de l'état :

Le candidat a proposé d'organiser des rencontres avec des femmes scientifiques pour motiver les filles, et d'organiser des discussions dans la classe pour dissiper leurs doutes. Il dit que les filles auraient tendance à vouloir être excellentes : elles préféreraient rester excellentes en littérature que moyennes en sciences.

1. Vous avez parlé d'organiser des rencontres : comment le faire en pratique ?

...

Avec qui ?

La conseillère du CIO.

Est-ce que c'est forcément une femme ?

2. Vous parlez de lutter contre les idées reçues, quelles sont pour vous de bonnes façons de lutter contre les idées reçues ?

3. Est-ce qu'il y a un cadre institutionnel ?

4. Au quotidien, dans votre classe ?

Dans les énoncés, faire attention à la parité. Faire attention au respect d'autrui, de la femme.
Et sur la découverte des métiers ?

...

Est-ce que c'est une de vos missions ?

Je ne pense pas.

Et l'orientation ?

Ce n'est pas une de mes prérogatives.

Qu'est-ce qu'une prérogative ?

Ce qui est obligatoire.

Donc vous pensez que ce n'est pas dans vos missions ?

5. Vous êtes en Terminale scientifique, comment ça se passe pour l'orientation des filles ? Est-ce que vous connaissez des dispositifs réservés aux filles ?

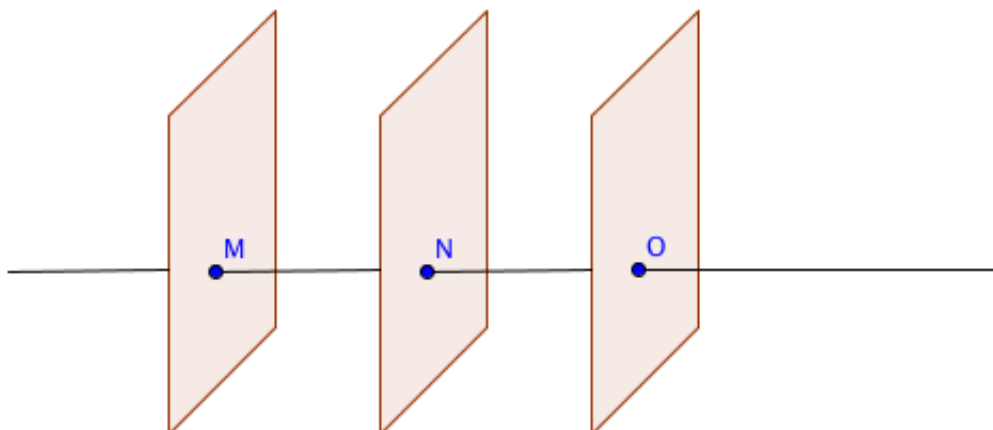
Un troisième candidat présente ce dossier.

1. Comment expliquer à l'élève qu'on ne peut pas dire que trois points sont alignés car dans un même plan ?

Le candidat propose la figure suivante :

Il explique : ce n'est pas parce que trois points sont dans des plans différents qu'ils ne sont pas alignés.

Est-ce qu'on peut revenir sur votre figure ?



...

Est-ce qu'il n'y a pas risque de confusion ? Par exemple, vos trois points ne sont-ils pas dans un même plan ?

Euh...si !

Et ces trois points, ne sont-ils pas alignés ?

2. Pouvez-vous rédiger la réponse à la question 3 ?

3. Pourquoi les droites (AC) et (AK) sont-elles sécantes ?

Elles appartiennent à deux faces orthogonales.

Vous dites qu'une droite appartient à une surface ? Qu'est-ce que vous voulez dire ?

Qu'elle est sur la surface, qu'elle est tracée dessus.

Est-ce que c'est correct de dire qu'une droite est tracée sur une surface ?

Non, il faut dire qu'elle est contenue.

Alors, reprenons, pourquoi les droites (AC) et (AK) sont-elles sécantes ?

On peut dire qu'elles sont coplanaires et non parallèles.

Comment vous montrez qu'elles sont coplanaires ?

...

4. Dans un des exercices que vous proposez, vous utilisez les vecteurs. Ici, est-ce que vous pouvez les utiliser ?

Oui.

Ok, allez-y !

Un premier exercice proposé par le candidat a pour but de faire travailler le vocabulaire de la géométrie dans l'espace en s'appuyant sur un parallépipède. On demande de lister des droites parallèles à une droite donnée, orthogonale, perpendiculaire,... Le candidat explique que cet exercice est destiné à une classe seconde.

Dans le deuxième exercice du candidat, on considère un tétraèdre $ABCD$. On cherche, lorsque E varie sur la droite (AB) et lorsque F varie sur la droite (DC) le lieu des milieux des segments $[EF]$. Le candidat explique qu'il utiliserait Geospace (comme pour l'exercice du jury). Il ferait conjecturer le résultat avant de le prouver, une inclusion puis l'autre.

Le troisième exercice du candidat demande de calculer l'intersection de deux plans dont les équations cartésiennes sont données.

5. Est-ce que vous pouvez nous expliquer votre deuxième exercice ?

Le candidat utilise Geospace : il fait varier E sur la droite (AB) : le milieu étudié décrit un segment à l'écran. Le candidat fait alors varier F sur la droite (CD) : le milieu étudié décrit un autre segment à l'écran. Le candidat explique qu'on va alors conjecturer que le lieu cherché est le plan engendré par les deux droites.

Est-ce que vous pouvez démontrer la première inclusion ?

Le candidat cherche plusieurs minutes.

Alors, vous en êtes où ?

6. Pour la remédiation, quel exercice avez-vous proposé ?

Le premier exercice ?

Après, les problèmes sont résolus ?

Non, mais j'ai préféré me restreindre à un exercice pour aborder d'autres points d'autres programmes.

En effet, c'était demandé au moins un exercice.

Partie agir en fonctionnaire de l'état :

Le candidat propose :

- de parler de l'histoire, de l'évolution de la société,
- d'évoquer les statistiques, en cherchant une action conjointe avec le professeur d'histoire,
- de faire venir dans la classe des femmes scientifiques ou ingénieures.

1. Est-ce qu'il n'y a rien d'autre à faire ?

...

Vous êtes tout seul ?

Ah oui, les autres, le professeur principal.

Oui...

Le conseiller d'éducation.

2. Vous avez parlé de projet d'établissement dans lequel doit d'intégrer le jeune professeur. Pouvez-vous nous en dire plus ?

...

Comment se met-il en oeuvre ?

3. Vous avez parlé de faire venir des gens dans la classe, ingénieures, etc,...

Est-ce qu'on peut travailler avec des entreprises ?

Oui.

Comment ça se passe concrètement ?

Il faut les inviter.

Comment ça se passe ?

Il faut des relations ?

Mais en pratique ? Qui peut vous aider dans l'établissement ?

4. Quelles autres actions ont été entreprises ?

On a changé les programmes.

Que voulez-vous dire ?

Il y a moins de géométrie, plus de statistiques.

Attention, vous n'allez pas me dire que les filles sont meilleures en statistiques qu'en géométrie ! (rires) Vous êtes sur un terrain glissant là !

...

5. Qu'est-ce qu'il y d'autre alors, comme actions ?

...

En pratique, dans la classe, au quotidien ? Par exemple, pour la participation ?

Faire participer les filles.

En pratique, concrètement ?

Exposé du cas

Sur proposition du conseil pédagogique, le chef d'établissement de votre lycée a établi pour l'année scolaire suivante un planning d'évaluation des élèves. Il a fixé l'organisation d'un baccalauréat blanc avant les vacances de printemps avec des épreuves communes à toutes les classes d'une même série. Le conseil d'enseignement qui a réuni les enseignants de mathématiques au mois de septembre a décidé la mise en place d'une progression commune pour les séries S et ES.

Deux professeurs de mathématiques de l'établissement considèrent que cette organisation porte atteinte à leur liberté pédagogique, notamment en raison du choix de la progression, qui ne leur convient pas. De plus, la concertation qui devra se mettre en place pour l'élaboration des sujets et du barème ne fait pas selon eux partie de leur temps de service.

Enfin ils disent ne pas se sentir liés par les orientations proposées par le conseil pédagogique ou par le conseil d'enseignement.

Question

Quelle analyse faites-vous de cette situation ?

Documentation fournie avec le sujet**Code de l'éducation****Article L. 421-5**

« Dans chaque établissement public local d'enseignement, est institué un conseil pédagogique. Ce conseil, présidé par le chef d'établissement, réunit au moins un professeur principal de chaque niveau d'enseignement, au moins un professeur par champ disciplinaire, un conseiller principal d'éducation et, le cas échéant, le chef de travaux. Il a pour mission de favoriser la concertation entre les professeurs, notamment pour coordonner les enseignements, la notation et l'évaluation des activités scolaires. Il prépare la partie pédagogique du projet d'établissement. »

Article L912-1

La liberté pédagogique de l'enseignant s'exerce dans le respect des programmes et des instructions du ministre chargé de l'éducation nationale et dans le cadre du projet d'école ou d'établissement avec le conseil et sous le contrôle des membres des corps d'inspection. Le conseil pédagogique prévu à l'article L. 421-5 ne peut porter atteinte à cette liberté.

Circulaire n° 97-123 du 23 mai 1997

Mission du professeur exerçant en collège, en lycée d'enseignement général et technologique ou en lycée professionnel.

Au sein de la communauté éducative, le professeur exerce son métier avec d'autres, dans le cadre d'équipes variées. [...] La mission du professeur et la responsabilité qu'elle implique se situent dans le triple cadre du système éducatif, des classes qui lui sont confiées et de son établissement d'exercice.

L'exercice

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = x(1 - x^2)$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On note (D) l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que : $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq x(1 - x^2)$.

- 1) Calculer l'aire du domaine (D) .
- 2) Existe-t-il une droite (Δ) passant par l'origine et partageant le domaine (D) en deux parties de même aire.

Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

La réponse d'un élève à la question 2)

On veut couper la partie en deux parties de même aire donc $\frac{1}{8}$. Une droite qui passe par l'origine a pour équation $y = ax$.

Je cherche le point M d'intersection avec la courbe :

$$x(1 - x^2) = ax$$

$$1 - x^2 = a$$

$$x^2 = 1 - a$$

$$x = \sqrt{1 - a}$$

$$M(\sqrt{1 - a}, a\sqrt{1 - a})$$

L'aire entre la courbe et la droite doit être égale à $\frac{1}{8}$ donc :

$$\int_0^{\sqrt{1-a}} x(1 - x^2) dx - \int_0^{\sqrt{1-a}} ax dx = \frac{1}{8}$$

c'est trop compliqué, j'arrête.

Je vois que l'aire entre la courbe et la droite vaut 0 quand M est en O et vaut $\frac{1}{4}$ quand M est en $I(1; 0)$ donc forcément elle vaut $\frac{1}{8}$ à un moment.

Le travail à exposer devant le jury

- 1- Analysez la production de l'élève. Quels sont selon vous ses acquis ? Sa démarche vous paraît-elle pertinente et quelles erreurs avez-vous repérées ?
- 2- En vous appuyant sur la démarche de l'élève, proposez une correction de la question 2) telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.
- 3- Présentez deux ou trois exercices dont la résolution fait appel au calcul intégral.

Dossier : Méthodes de calculs d'intégrales et le travail en équipes.

Le candidat écrit deux exercices courts :

Ex. 1 Retrouver la formule donnant le volume d'une sphère.

Ex. 2 Calculer une primitive de $\ln$.

Enfin, il donne l'énoncé d'un troisième exercice aboutissant à l'inégalité

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \leq \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a))$$

pour une fonction f continue et croissante sur un intervalle $[a, b]$.

1. Au début de votre analyse vous avez dit l'équation de la droite sera ax . Est-ce que vous pouvez rectifier ?

$$y = ax$$

Alors ça c'est une des erreurs.

2. Dans sa correction détaillée de la question ??? le candidat écrit :

Le (ou les) point d'intersection de Δ avec $\mathcal{C}$ sont de coordonnées $M(\sqrt{1-a}, a\sqrt{1-a})$. On peut revenir sur le ou les points d'intersection ?

...

Est-ce qu'on peut reprendre en détail cette partie ?

Le candidat raisonne par implications. Il arrive à $x = \sqrt{1-a}$ ou $-\sqrt{1-a}$, puis dit qu'il élimine la solution négative.

Vous avez dit qu'on éliminait $-\sqrt{1-a}$, mais pas expliqué pourquoi on gardait l'autre terme ?

...alors on peut le faire avec des équivalences :

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq \sqrt{1-a} \leq 1$$

$$0 \leq 1-a \leq 1$$

$$0 \leq a \leq 1$$

Est-ce que c'est ce qu'on cherchait ?

3. Pendant son analyse, le candidat a expliqué que l'élève était parti dans une direction difficile, qu'il était plus simple de considérer l'aire en rouge, dont la mesure est la somme de celle d'un triangle rectangle et d'une intégrale. Il introduit alors la fonction : $g(a) = \frac{a(1-a)}{2} + \int_{\sqrt{1-a}}^1 f(x)dx$. Il affirme par la suite que g est continue.
 Vous avez dit que g est continue ? Déjà c'est incomplet...
 g est continue sur $[0, 1]$.
 Bon, et alors pourquoi ?
 $\int_{\sqrt{1-a}}^1 f(x)dx$, c'est l'unique primitive de f , modulo $\sqrt{1-a}$. Ah, modulo ?
 C'est une composition.
 De quoi ?
 de $h : x \mapsto \sqrt{1-x}$ et $i : x \mapsto -\int_1^x f(t)dt$. On a $g = h \circ i$.
 Sûr ? Vous faites d'abord i ?
 Euh... $g = i \circ h$.
 Et alors, pourquoi c'est continue ?
 La fonction i est dérivable.
 Est-ce que ce n'est pas un peu vague ?
 ...
 Oui...mais...
 ...
 et avec du vocabulaire qui dépasse le Bac ? Elle est comment i ? De quelle classe ?
 Elle est $\mathcal{C}^1$.
 Pourquoi ?
4. Alors je ne vois pas pourquoi votre méthode (considérer l'aire sous la droite) est plus pertinente que celle de l'élève ?
 ...
 Est-ce que ce sont des intégrales compliquées à calculer ? Est-ce qu'on peut faire le calcul ?
5. On peut trouver a ?
6. On va regarder votre troisième exercice. Vous aviez une illustration informatique ?
 Oui...le candidat discute sur une figure réalisée sur Geogebra. On voit apparaître les rectangles sous la courbe.
 On peut le programmer ?
 Oui.
 Vous l'avez fait ?
 Non.
 Alors vous obtenez une majoration de l'erreur en $\frac{1}{n}$. Est-ce que vous connaissez mieux comme méthode ?
 Les trapèzes.
 Qu'obtient-on comme majoration de l'erreur avec les trapèzes ?

8. Dans votre premier exercice, vous parlez du volume d'une sphère. Mais c'est zéro le volume d'une sphère ?
9. Est-ce que vous pouvez reprendre l'énoncé de votre exercice 2 ?
10. Reprenons votre exemple sous Geogebra : vous avez pris comme fonction f celle qui à x associe $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Vous connaissez la primitive ?
C'est Arcsinus.
Pourquoi avoir choisi celle là ?
Car les élèves ne peuvent pas calculer la primitive : on voit que la méthode est utile.
Est-ce que ça pourrait avoir un intérêt de prendre une fonction dont on sait calculer la primitive ?

Partie agir en fonctionnaire de l'état :

1. Vous avez parlé des dix compétences. Est-ce qu'il y est question du travail en équipe ?
2. Imaginons que sur trois collègues de la TES, un ne soit pas d'accord pour participer au Bac blanc. Comment gérez-vous cette situation ?
3. On a parlé du conseil d'établissement. Quelles sont les missions du conseil pédagogique ?
...
En termes de missions, quelles sont les différences entre le conseil d'administration et le conseil pédagogique ?
...
Est-ce que le conseil d'administration peut se prononcer sur le calendrier des épreuves communes ?
...
Comment les gens de ces conseils sont désignés ?
4. Est-ce que vous connaissez la notion de professeur coordinateur ?
...
Quel est le rôle du chef d'établissement vis à vis du professeur ?

Un deuxième candidat analyse le même dossier. Il fait remarquer que lorsque l'élève écrit

$$\int_0^{\sqrt{1-a}} x(1-x^2)dx - \int_0^{\sqrt{1-a}} axdx \quad ,$$

il commet une erreur en intégrant jusqu'à $\sqrt{1-a}$. Le candidat écrit alors au tableau la correction suivante :

Pour $x \neq 0$ on a $M(\sqrt{1-a}, a\sqrt{1-a})$ et

$$\int_0^1 x(1-x^2)dx - \int_0^{\sqrt{1-a}} axdx = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{4} - a\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-a}} = \frac{1}{8}$$

$$-4a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$4a^2 + 4a + 1 = 0$$

$$\Delta' = 0 \text{ et donc } a = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{4}.$$

1. On va commencer par dire que $a = \frac{-1}{4}$ n'est pas solution de votre équation.

...

Mais en fait, la ligne d'avant c'était vraiment $-4a^2 - 4a + 1 = 0$?

Oula oui...il y a une erreur...

C'était une erreur... Ca arrive les erreurs... Comment auriez-vous pu vous en rendre compte ?

...

Revenons à cette première équation : $4a^2 + 4a + 1 = 0$. A quel niveau peut-on factoriser ce polynôme ?

En Seconde.

Et au collège, qu'est-ce qu'on peut faire ?

...

Revenons à l'erreur : comment pouvait-on voir sur la figure que $a = -\frac{1}{4}$ ne convenait pas ?

2. Vous pouvez nous expliquer d'où viennent les bornes 0, 1, puis 0 et $\sqrt{1-a}$?
(Après vérifications, il se trouve que l'élève avait la bonne expression.)

3. Quelle est la différence entre intégrale et primitive ?

4. Quelle différence il y a entre les objets $\int_0^1 f(x)dx$ et $\int_0^\alpha f(x)dx$?

...

Pour $\int_0^\alpha f(x)dx$, quand on fait bouger α , qu'est-ce que vous pouvez nous dire ?

...

Est-ce qu'on ne définirait pas une fonction ?

Oui, une fonction constante.

C'est une fonction constante ? Par exemple en $\alpha = 1$ et ...pour une autre valeur de α ?

...

Est-ce qu'il y a un lien entre ce dont on parle et les fonctions que vous avez regardées ?

...

Est-ce qu'on peut exprimer $\int_0^{\sqrt{1-a}} f(x)dx$ en fonction de F , la primitive de f ?

...

Et du coup, est-ce qu'on peut appliquer comme l'a fait très intuitivement l'élève le théorème des valeurs intermédiaires ?

...

Pourquoi la fonction que vous venez d'évoquer est-elle continue ?

Oui car elle est dérivable : c'est la primitive de f .

Mais est-ce que la fonction étudiée est vraiment F ?

5. Pour calculer $\int_0^1 x(1-x^2)dx$, est-ce qu'on peut faire quelque chose d'autre que la linéarité ?

6. Le deuxième exercice proposé par le candidat est une vérification de la méthode de Monte Carlo à l'aide d'un tableur. Le candidat considère la restriction de la fonction $x \mapsto x^2$ à l'intervalle $[0,1]$. Le tableur tire 100 réels au hasard dans cet intervalle, et calcule la moyenne des valeurs de la fonction.

Est-ce que vous pouvez expliquer en quoi votre deuxième exercice est lié au calcul d'intégrale ?

On utilise l'intégrale pour vérifier la méthode de Monte Carlo.

Pourquoi cette méthode de Monte Carlo permet de calculer la surface ?

7. Le premier exercice proposé par le candidat a pour objectif de démontrer la formule donnant le volume d'un cône à partir d'une intégrale.

Et pour le volume du cône ? Est-ce que vous pouvez écrire l'intégrale obtenue ?

...

Vous parlez des troncs de cône : quelle est la différence avec un cylindre ?

...

L'intégrale que vous écrivez, qu'est-ce que c'est ?

Partie agir en fonctionnaire de l'état :

1. Est-ce que le conseil pédagogique a un pouvoir décisionnaire ?

2. Vous avez parlé du supérieur hiérarchique de l'enseignant. Qui est ce supérieur ?

...

Que pensez-vous du rôle du chef d'établissement ?

L'inspecteur est le supérieur hiérarchique concernant la pédagogie ; au sein de l'établissement, c'est le chef d'établissement.

On peut avoir deux supérieurs hiérarchiques ?

...

Ca veut dire quoi supérieur hiérarchique ?

Depuis la décentralisation, le professeur doit obéissance au chef d'établissement.

Doit obéissance ? Quelque soit la décision du chef d'établissement, le professeur est tenu de la suivre ?

3. Les professeurs, ils sont obligés de travailler en équipe ?

4. Comment sont désignés les membres du conseil pédagogique ?

5. Et le fait de faire une progression commune, c'est admissible ?

Il n'y a rien de choquant, surtout avec le nouveau système où les élèves peuvent passer de S en ES.

6. Et ces deux enseignants réfractaires, vous pensez qu'ils peuvent avoir des sanctions ?

Celui qui peut les sanctionner, c'est le chef d'établissement. C'est lui qui peut les mettre à pied, leur donner un avertissement.

Il peut les mettre à pied ?

...

Comment sont évalués les professeurs ?

Le chef d'établissement communique une note.

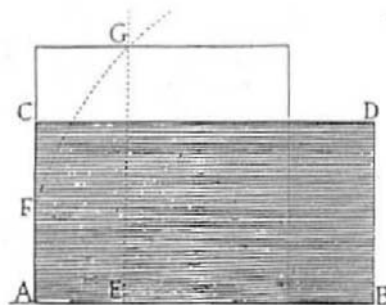
Alors de quel levier dispose le chef d'établissement ?

Je ne sais pas.

L'exercice

Voici une traduction en langage contemporain d'un document du XVII^e siècle écrit par le mathématicien hollandais Samuel Marolois (1572-1627).

Soit $ABDC$ un rectangle et F le milieu de $[AC]$. Le cercle de centre A et de rayon AF coupe $[AB]$ en E . Le cercle de centre B et de rayon BF coupe la perpendiculaire à (AB) passant par E en G .



GE est la longueur du côté d'un carré dont l'aire est égale à l'aire du rectangle $ABDC$.

Justifier la dernière affirmation du texte.

Les solutions proposées par deux élèves

Élève 1

Je fais une figure avec 4 cm et 7 cm et je vais démontrer que l'aire du carré vaut 28 cm^2 .

Avec le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle BAF j'ai :

$$BF^2 = AB^2 + AF^2 = 49 + 4$$

Donc $BF^2 = 53$, $BF = \sqrt{53} = 7,28$.

dans le triangle rectangle EBG j'ai $GB^2 = EB^2 + EG^2$, $7,28^2 = 25 + EG^2$. J'obtiens $EG = 5,29$ donc l'aire du carré est $27,98$. Les deux aires sont égales.

Élève 2

J'ai mesuré sur le dessin et j'ai trouvé 2,8 cm et 5,3 cm.

Je vais démontrer que $GE^2 = 14,84 \text{ cm}^2$.

Pythagore dans le triangle EGB : $14,84 = GB^2 - EB^2 = FB^2 - 15,21$.

Or $FB^2 = 30,05$ (Pythagore dans le triangle FAB). D'où $14,84 = 30,05 - 15,21$ vrai.

Le travail à exposer devant le jury

- 1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence les compétences acquises et celles non acquises.
- 2- Quel peut être selon vous l'intérêt d'étudier des notions à travers une approche historique ?
- 3- Exposez une correction de l'exercice comme vous le feriez devant une classe de troisième.
- 4- Présentez deux ou trois problèmes de construction, dont l'un au moins met en jeu un logiciel de géométrie dynamique.

Exposé du cas

Dans votre classe de sixième, vous identifiez trois élèves pour lesquels la maîtrise des connaissances et des compétences du socle commun n'est pas attestée pour le palier 2, notamment en ce qui concerne les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique.

Question

Comment envisagez-vous la formation et l'évaluation en mathématiques pour ces trois élèves ?

Documentation fournie avec le sujet

Article 9 de la loi d'orientation du 23 avril 2005.

Après l'article L.122-1 du code de l'éducation, il est inséré un article L.122-1-1 ainsi rédigé :

« Art. L. 122-1-1. La scolarité obligatoire doit au moins garantir à chaque élève les moyens nécessaires à l'acquisition d'un socle commun constitué d'un ensemble de connaissances et de compétences qu'il est indispensable de maîtriser pour accomplir avec succès sa scolarité, poursuivre sa formation, construire son avenir personnel et professionnel et réussir sa vie en société. »

Extrait du document : Livret personnel de compétences, repères pour sa mise en œuvre au collège (DGESCO, mai 2010).

[...] A l'école, les attestations de maîtrise des connaissances et des compétences du socle commun sont complétées en fin de CE1 pour le palier 1, en fin de CM2 pour le palier 2. Ces attestations renseignées au palier 1 et au palier 2 sont des supports structurants pour la liaison école-collège. Étant très détaillées, elles apportent des éléments d'information essentiels pour la mise en place, sans délai, de l'aide et de l'accompagnement au travail nécessaires aux élèves en difficulté scolaire.

En fonction des compétences validées dans les attestations jointes au livret scolaire, les équipes pédagogiques identifient les points forts et les difficultés des élèves, et organisent la mise en place des aides nécessaires, notamment la définition des objectifs d'apprentissage prioritaires des programmes personnalisés de réussite éducative. Les compétences 1, 2 et 3 sont prioritaires dans la mise en place de ces remédiations, sans pour autant négliger la lecture des autres compétences.

Au collège, les professeurs s'appuieront sur les grilles de référence des programmes de l'école pour évaluer et valider au palier 2 les compétences non encore acquises. [...]

Dossier : Problèmes de construction et évaluation des élèves.

1. Historiquement, qu'est-ce qui a été beaucoup utilisé en architecture ?
2. Historiquement, à quoi peut aboutir l'exercice ? En liaison avec le corpus mathématique ?
...
Est-ce qu'il y a une illustration des propriétés algébriques qui est possible ?
...
Les problèmes de construction à la règle et au compas ?
3. Est-ce qu'on peut construire $\sqrt{x}$ à la règle et au compas ?
La diagonale d'un carré de côté $\frac{x}{2}$?
La diagonale d'un carré de côté $\frac{x}{2}$, c'est $\sqrt{x}$?
...
Qu'est-ce qu'on a montré dans l'exercice ?
4. Est-ce qu'on peut reprendre l'exercice du jury et l'expression de EB ?
...
 x c'est AB et $\frac{y}{2}$?
En fait, $EB = |x - \frac{y}{2}|$.
Vous feriez cela avec des élèves de troisième ?
Non.
Comment feriez-vous ?
Traiter différents cas.
Qu'est-ce qui change ? Vous pouvez expliquer ?
...
Est-ce qu'on est sûrs que tout se passe bien ? Pourquoi ça marche quand même ?

Le premier exercice proposé par la candidat est l'exercice suivant, qu'il proposerait ainsi à une classe de Seconde :

On considère un triangle ABC isocèle de sommet A . On note K , L et M les milieux respectifs des segments $[A, B]$, $[B, C]$ et $[A, C]$.

1) Un cas particulier dans un repère.

On considère un point P tel que (L, C, P) soit orthonormé.

a) Faire une figure.

b) Déterminer les coordonnées du point B .

c) Déterminer les coordonnées des points M et K .

d) En déduire que $CK = BM$.

2) Cas général sans repère.

Déterminer la symétrique de B par rapport à la droite (AC) et en déduire que $CK = BM$.

5. Reprenons votre exercice. Est-ce qu'on a en fait, comme vous le dites, que A est de coordonnées $(0,2)$?
 Oui, on choisit le repère.
 Justement, ce n'est pas si clair.
 ...
6. En fait, qu'entendez-vous par "déterminer le symétrique de B par rapport à la droite (AC) " ?
 ...
 En deux mots ?

Partie agir en fonctionnaire de l'état :

1. Vous parliez du pallier 2 : est-ce que le socle commun continue au delà du collège ?
 ...
 Et encore au delà ?
2. Vous avez annoncé une réflexion sur les évaluations faites en Cours Moyen. Est-ce que ces évaluations ont pour mission d'évaluer le pallier 2 ?
 ...
 Est-ce qu'il y en a d'autres ?
3. Vous avez parlé des PPRE : qu'est-ce qu'il y a, qu'est-ce qui se passe ?
 ...
 Vous avez parlé d'aides individualisées pour les volontaires : est-ce dans un cadre précis ?
 ...
 Qui y intervient ?
 ...
 Est-ce que les enseignants peuvent y aller ?
 ...
 Vous avez parlé de collaboration avec les autres enseignants : vous pouvez développer ?
4. Vous avez bien lu les documents : les mathématiques sont séparées du reste.
 ...
 Vous, vous pouvez valider certains items qui ne sont pas dans la compétence 3 ?
 ...
 Par exemple, la compétence 1, sur la maîtrise de la langue ?
 Oui, le prof de maths peut l'évaluer.
 Et le prof de Physique, il peut évaluer des items liées aux Mathématiques ?
 Ah...non, il faut quand même respecter une certaine hiérarchie.

Un autre candidat analyse ce dossier :

1. Pour la première question, pouvez-vous reprendre ce qui est acquis ou non acquis ?
Le candidat détaille ce qui a été fait par l'élève.
Et donc, en termes de compétences ?
...
Qu'est-ce qu'une compétence ?
...
Par exemple, la conclusion concernant l'égalité des deux aires ?
...
Pour la deuxième question, vous estimez sa réponse acceptable ?
Il n'a pas justifié.
Et même si c'était justifié ?
... Est-ce que ça ne dérange pas qu'il ait mesuré sur le dessin ?
...et puis il s'est trompé ?
Il s'est trompé ou c'est une inexactitude de la mesure ?
...
Finalement, est-ce qu'on peut mesurer et s'appuyer sur la mesure ?
...
Pour résumer : entre le premier qui prend des mesures, et celui qui mesure sur le dessin, lequel a le plus de recul sur les notions mathématiques...ou plutôt l'attitude la plus abstraite ?
...
Vous n'avez pas parlé de la compétence et de la capacité à rédiger : que pouvez-vous dire ?
...
Est-ce qu'on peut comparer les deux ?
2. Vous avez parlé d'une approche historique de Pythagore : est-ce que vous pouvez développer ?
...
Pourquoi ça peut être intéressant l'approche historique ?
3. Concernant votre correction de l'exercice : est-ce ainsi que vous le présenteriez ?
Non.
C'est pourtant ce qui était demandé ? Les quantificateurs, à partir de quand sont-ils utilisés ?
...
A ce propos : vous écrivez " $BF = BG \Rightarrow BF^2 = BG^2$ ". Pourquoi écrivez-vous le mot "donc" ici ?

4. Pour vous, quelles qualités doit posséder une rédaction d'un exercice proposé à des élèves de troisième ?
 Il faut que les hypothèses apparaissent.
 Qu'est-ce que vous appelez les hypothèses ?
 Il faut aussi qu'il y ait une conclusion.
 Vous avez aussi proposé des exercices au niveau collège, pourquoi ?
 Pour coller à l'exercice, avec d'autres problèmes de construction.
 Qu'est-ce que c'est un problème de construction ?
 ...
 Par exemple, dans votre exercice : est-ce un enjeu majeur pour des élèves de quatrième ?
 Non, mais on va leur faire faire des conjectures.
 Alors est-ce vraiment un exercice de construction ?

5. Vous avez dit que certains établissements fournissent le logiciel Geogebra :
 que voulez-vous dire ?
 Qu'on peut l'utiliser.
 Est-ce qu'on arrive et Geogebra est installé, on peut s'en servir ?
 ...
 Quel est l'intérêt du logiciel Geogebra ?

Partie agir en fonctionnaire de l'état :

1. Concrètement, que feriez-vous pour aider ces élèves ?
 Des entretiens individualisés... je leur proposerai de faire une heure individualisée.
 Qu'est-ce que vous appelez une heure individualisée ?
 Les prendre à part pour faire une heure.
 Vous viendriez, comme ça ?
 ...
 Vous pourriez les obliger à venir ?

2. Comment observer objectivement que ces élèves sont dans cette situation ?
 ...
 Est-ce qu'il n'y a pas des outils ?
 ...
 Qu'est-ce que vous savez du socle ? Qu'est-ce que vous savez du pallier deux ?
 ...
 Combien est-ce qu'il y a de palliers en tout ?

 Qu'est-ce qu'il y a en plus des tests d'évaluation ?
 ...
 Combien est-ce que le socle compte de compétences ?

4. Quel est le lien entre les missions de l'enseignant et le socle ?

...

Quels objectifs on a par rapport à ce socle, en fin de scolarité ?

L'exercice

Soit $[AB]$ un segment de longueur 1 et soit M un point de $[AB]$ distinct de A et B . On construit, du même côté du segment $[AB]$, les triangles équilatéraux AMP et MBQ .

- 1) Existe-t-il une position du point M telle que le triangle MPQ ait une aire maximale ?
- 2) Expliquez pourquoi cette position du point M rend minimale l'aire du quadrilatère $ABQP$.

La solution proposée par un élève à la question 1) dans un devoir à la maison

Comme je ne trouvais rien malgré le temps qui passait, j'ai cherché « aire d'un triangle » sur Wikipédia et j'ai trouvé trois formules :

- ♦ *une qui utilise base fois hauteur mais je ne connais pas la hauteur de PQM alors je l'ai éliminée ;*
- ♦ *une autre la formule de Héron mais il faut connaître les trois côtés et je n'en connais que deux donc j'ai utilisé la troisième $S = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma)$*

Je trouve

$$S = \frac{1}{2}x(1-x)\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

Le maximum est obtenu au sommet de la parabole pour $x = -\frac{b}{2a} = 0,5$ et ce maximum vaut $f(0,5) = \frac{\sqrt{3}}{16}$.

Le travail à exposer devant le jury

- 1- Quelles sont les connaissances et les compétences mises en jeu dans l'exercice ?
- 2- Analysez la production de l'élève. En particulier
 - que dire de sa démarche ?
 - son raisonnement vous semble-t-il valable ?
 - comment pourriez-vous amener l'élève à justifier au niveau de la classe de seconde la formule de l'aire du triangle qu'il utilise ?
- 3- Proposez une correction de la question 2) comme vous l'exposeriez devant une classe de seconde.
- 4- Présentez deux ou trois exercices sur le thème « optimisation ».

Dossier : Optimisation.

1. Revenons à la question 2 : vous avez donné la démonstration de la formule de Héron. Mais comment amener l'élève à la justifier ?

On peut proposer un exercice détaillé permettant d'en faire la preuve. Pour la classe entière. (Le candidat propose un tel exercice : il en écrit l'énoncé au tableau, avec trois sous-questions.)
On pourrait également le proposer sous forme de problème ouvert.

2. Est-ce que vous pouvez résoudre la question 1 ?

3. Est-ce que vous connaissez d'autres méthodes pour résoudre la question 2 ?

...je ne vois pas.

Tracer les droites (AP) et (AQ) . Que peut-on dire des droites (PM) et (RB) ? Elles sont parallèles, par les angles alterne-internes. C'est au programme de la classe de cinquième.

Que peut-on dire des triangles PRQ et PQM ?

Ils sont semblables.

Pourquoi ?

Car ils ont trois angles égaux.

Cela suffit ?

Euh...oui.

Regarder les triangles équilatéraux.

Oui, ils ont trois angles égaux, mais ne sont pas semblables. Mais comme ils ont une longueur commune, PQ , donc PRQ et PMQ sont semblables.

3. Pouvez-vous répondre à la question 2 ?

...je ne vois pas.

Passons, vous verrez sans doute quand vous reprendrez.

4. Pourrez-vous résoudre votre exercice 1 sur les graphes ?

Oui, j'utilise l'algorithme de Dijkstra.

Allez-y.

5. Pour finir : un élève dit à un autre élève : l'optimisation est facile, on a juste à dériver une fonction, et trouver les zéros de la fonction. Pensez-vous qu'il a compris ?

Non, les zéros de la fonction ne sont pas forcément les extremums de la fonction (comme dans mon exercice).