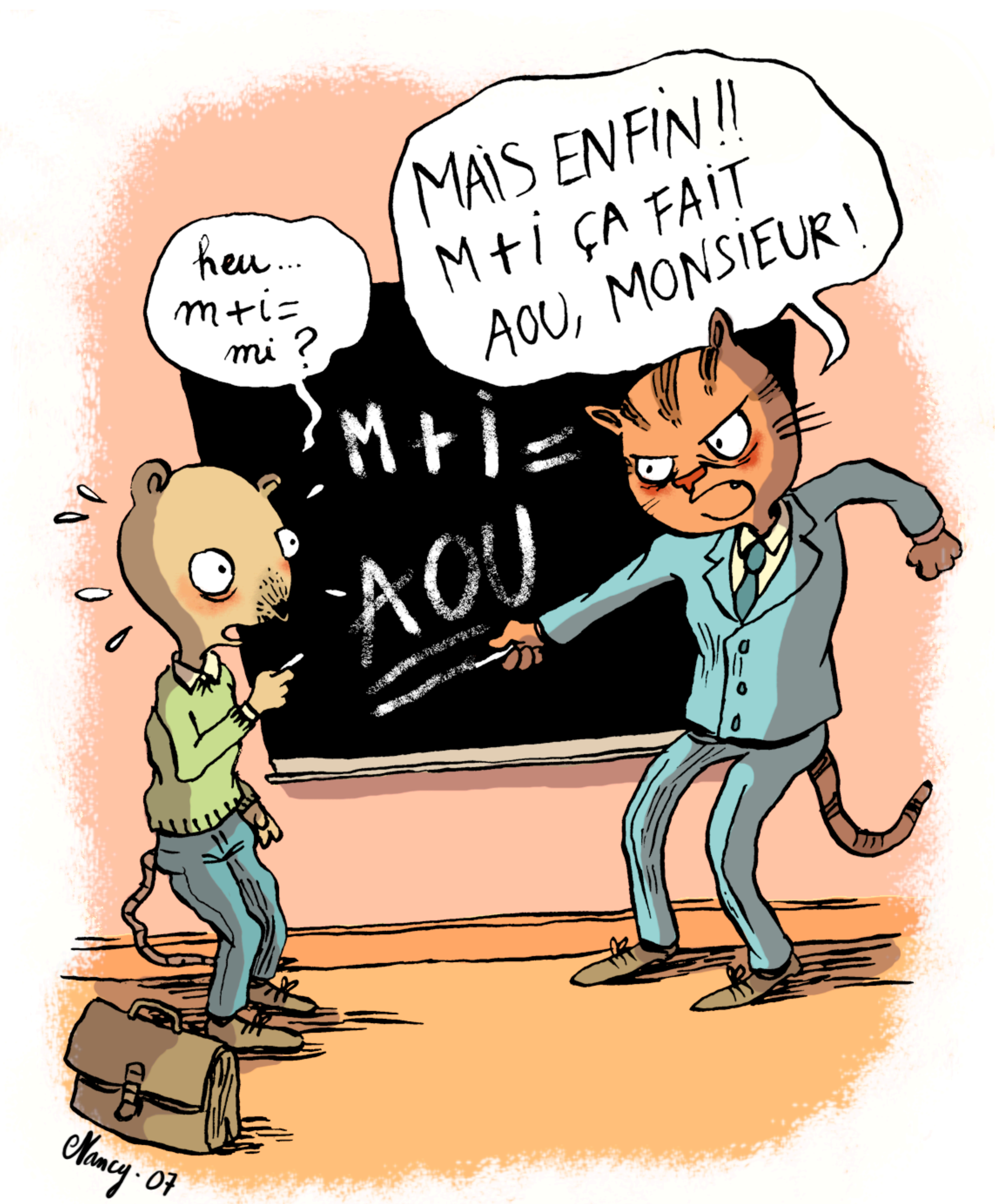

Souvenirs d'oraux du Capes
externe de Mathématiques

Ce document est une compilation de souvenirs d'oraux des sessions 2006, 2007 et 2008 du CAPES externe de mathématiques : souvenirs de questions posées par le jury, et souvenirs de dialogues entre candidats et jurys. Je remercie les candidats que j'ai contactés et qui m'ont décrit leurs oraux : Aurélie, Adeline, Amandine, Amélie, Anne, Boonie, Camille, Cécile, Cécile, Cécile (!) Christophe, Dajety, Elodie, Emilie, Florian, Geoffrey, Guillaume, Hervé, Marie, Ilan, Jean-Pierre, Julien, Julien, Kupo, Laure, Laurence, Laurent, Magali, Nathalie, Noelle, Olivier, Olivier, Pierre, Samuel, Séverine, Stéphane, Sylvain, Thyerry, Yoann et Zouhir. Merci également aux visiteurs qui m'ont décrit les oraux auxquels ils avaient assisté. Il s'agit d'une troisième version toujours non raffinée du document : faute de temps pour la relecture, le nombre de fautes de frappe (et d'orthographe !) augmente de version en version, et les figures manquent encore. On prendra garde au fait que les questions et les dialogues ici restitués ont subi le triple biais de la subjectivité, de la mémoire et de mon écriture.

Bien sûr, personne n'imagine un seul instant qu'on se pare pour passer l'oral en travaillant les quelques questions proposées ici. Tout au plus, on trouve une première base d'exercices pour réviser les thèmes du concours, on se fait une idée de l'enchaînement des questions et des réponses ainsi que du niveau de précision demandé.

Ce document ne contient en fait que des questions. Il ne contient aucune proposition de réponse aux questions du jury. Les réponses des candidats qui sont rapportées posent en fait plus de questions qu'elles n'apportent de corrections. Il ne s'agit en aucun cas de modèles de réponse ni de rédaction.

Je propose de travailler sur ces pages à l'aide d'une carte postale. Ne la faire glisser pour découvrir la ligne suivante qu'après avoir bien réfléchi, avoir essayé de la deviner. Essayer de répondre aux questions posées, mais aussi réagir aux réponses proposées par les candidats, imaginer les difficultés qu'elles soulèvent.

Quand il est utile et connu, le contexte (plan, exercice proposé par le candidat...) est rappelé. Le candidat parle comme ci, alors que le jury `parle comme ça`. J'ai rajouté quelques questions à mon goût : elles sont précédées d'un ♣.

Un très grand merci à Pierre et Ilan pour leurs nombreuses contributions.

Ce document n'aurait jamais vu le jour sans l'accueil et l'amitié de Cécile et Nicolas : merci encore.

Un très grand merci à Nancy Peña qui a réalisé la couverture. Nancy Peña a (entre autres!) scénarisé et dessiné *La guilde de la mer*[1] et de *nouvelles aventures du chat botté*[2].

Fabien Herbaut
`herbautf@yahoo.fr`

[1] *La guilde de la mer*, aux éditions *La boîte à bulles*, 2006
[2] *Les nouvelles aventures du chat botté*, aux éditions *Six pieds sous terre*, 2006

Exposé 1 - Utilisation d'arbres, de tableaux, de diagrammes pour des exemples de dénombrement. Dénombrement des arrangements et des permutations.

L'exposé présenté compte deux parties : utilisation d'éléments graphiques et outils de dénombrement.

1. `Dans l'exposé, on a vu beaucoup de sommes et peu de multiplications. Pourquoi ne pas avoir plus aborder cet aspect là ? Avez-vous des idées ?`
Par exemple un tableau représentant la somme du résultats obtenus aprés le lancer de deux dés.
`Mmmm...est-ce qu'on peut voir ce que ça donne ?`

2. `Les élèves de Terminale connaissent-ils le vocable "bijection" ?`
Oui.
`Peut-on donner une interprétation des permutations à partir des bijections ?`
...
`Et des arrangements ?`
Le candidat ne voit pas.
`Et bien : prendre un arrangement de` p `éléments parmi` n`, cela revient à choisir un certain type de fonction d'un certain ensemble dans un autre...`
Le candidat ne rentre pas dans cette démarche.
`Considérons un tiercé : nous classons` 3 `chevaux parmi` 21`. Quelle fonction définit-on ?`

3. `Considérons le mot DENOMBREMENT. Combien peut-on compter d'anagrammes ?`
Le candidat explique comment il arrive à $\frac{12!}{3!2!2!}$.
`Et combien d'anagrammes dont les lettres E ne seraient pas placées consécutivement ?`
...
`Et combien d'anagrammes dont les lettres sont dans l'ordre croissant alphabétiquement ?`

Au cours de cette séance de questions, comme le candidat s'en tient au niveau auquel il a situé la leçon (Terminale), le jury lui fait remarquer qu'on est l'aprés-midi, et qu'on peut aborder des notions plus compliquées.

♣ Savez-vous dans quels programmes apparaissent les arrangements ?
♣ Connaissez-vous la différence entre une paire et un couple ?

Voici des questions posèes à un candidat 2007 :

1. `On considère un entier` n `somme de` k `entiers` n_1, n_2, `...et` n_k. `Le rationnel` $\frac{n!}{n_1!...n_k!}$ `est-il entier ?`

2. `Combien peut-on compter d'anagrammes du mot MATHEMATIQUES ?`
...
`Quel est le lien entre les anagrammes et les permutations ?`

3. `Vous avez parlé du principe du berger. Est-ce que vous pouvez en donner un énoncé précis ?`

4. `Est-ce qu'on peut utiliser votre résultat sur le nombre de fonctions entre des ensembles finis` E `et` F `pour calculer le cardinal de` $\mathcal{P}(E)$ `?`
Oui...
`Est-ce qu'on compter le nombre d'applications injectives de` E `de cardinal` m `dans` F `de cardinal` m `?`

Voici maintenant des questions posèes à une candidate 2008 :

1. Le premier énoncé de l'exposé est le suivant :
Propriété : Si $A \cap B = \emptyset$, alors $|A \cup B| = |A| + |B|$.
Pour le démontrer, la candidate définit trois fonctions f, g et h. Par exemple elle écrit que $f\ :\ A \to \{1 \ldots n\}$ est définie par $x \mapsto i$.
`On reprend votre démonstration de la première proposition. Votre fonction` f`, à` x `elle associe` i `?`
A chaque élément de A on lui associe son entier compris entre 1 et r
`Comment lui est-il associé ?`
J'ordonne $A = (x_1, \ldots, x_r)$.
`Un ensemble, c'est avec des parenthèses ?`

2. La candidate a énoncé le principe d'inclusion-exclusion, encore appelé formule du crible.
`Comment démontrer cette égalité ?`
Par récurrence.
`Est-ce que vous pouvez nous la démontrer dans le cas de trois ensembles ?`

3. `Pourquoi` $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ `?`
La candidate fait un dessin.
`D'accord, mais comment démontrer que deux ensembles sont égaux ?`

4. `Vous avez défini` p`-uplets et` p`-listes : quelle est la différence ?`

Exposé 2 - Exemples de problèmes dont la résolution fait appel à l'utilisation de graphes, orientés ou non.

Le candidat fait un plan en trois parties : graphes eulériens, connecteur minimal et une dernière partie intitulée coloriages et nombre chromatique.

1. Dans la leçon, le candidat a défini les graphes semi-eulériens sans les utiliser par la suite. On lui demande :
`Vous avez introduit les graphes semi-eulériens. Vous ne vous en servez pas ?`
Non. Mais il y a des propriétés.
`Vous sauriez vous en servir ? Vous avez des applications ?`
Dans mon exemple, si je rajoute un pont, le graphe devient semi-eulérien. Alors on peut se servir de la propriété pour les graphes semi-eulériens.

2. `Sauriez-vous démontrer cette propriété sur les graphes semi-eulériens à partir de propriétés des graphes eulériens ?`
...
`Si vous avez un graphe semi-eulérien, votre proposition dit qu'il existe un chemin eulérien. Quelles en sont les extrémités ?`
Ce sont les sommets de degré 3.
`Pourriez-vous démontrer la nouvelle proposition à l'aide de l'indication ?`

Questions posées à un autre candidat :

1. `Qu'est-ce qu'une chaîne eulérienne ?`

2. `Comment démontrer le théorème d'Euler ?`

3. Le candidat a donné la définition de la matrice d'un graphe.
`Qu'est-ce qu'on remarque sur les coefficients de la matrice d'un graphe ?`
La matrice est symétrique.
`Quel est l'intérêt des ces matrices ? En probabilité par exemple ?`
...
`Est-ce que vous connaissez les chaînes de Markov ?`

4. `A partir de cette matrice, que dire des chemins menant de` i `à` j `?`

5. Le candidat a présenté dans son exposé l'algorithme de Powell.
`Est-ce qu'on peut essayer d'appliquer l'algorithme de Powell sur un exemple ? Un graphe dont les sommets sont les points` A, B, C, D `et` E. `On relie` A `à` B, B `à` C, C `à` D `et` D `à` E `?`
Le candidat explique.
`D'accord, et à la machine ?`

6. `Vous avez dit que le nombre chromatique était majoré par le degré. Pourquoi ?`

7. `Est-ce qu'on peut dire quelque chose sur la stabilité et les chaînes de Markov ?`

Suivent les souvenirs d'une candidate 2008.

La candidate nous donne ses impressions : j'ai placé ma leçon à un niveau Terminale ES, Spécialité Maths. J'ai précisé que l'introduction à la théorie des graphes devait essentiellement être basée sur l'étude d'exemples. Mon exposé était donc construit à partir de plusieurs applications, à partir desquelles je donnais petit à petit le vocabulaire de base, et les propriétés associées. Je dois avouer que je n'ai démontré formellement aucune de ces propriétés, j'ai uniquement parlé du caractère intuitif de certaines d'entre elles. Je m'attendais à ce que le jury me questionne plus précisément sur ces démos, mais il n'en a rien été. La candidate nous dit avoir obtenu une note de 13.

1. `Votre définition d'un cycle est un peu rapide. Comment définiriez vous un cycle à un élève de Terminale ES ?`

2. La candidate a proposé l'application suivante : un petit village organise un tournoi de basket. Cinq équipes doivent s'affronter. A cause de contraintes horaires, l'organisateur aimerait que chacune des équipes n'en rencontre que 3 autres. Est-ce possible ? La candidate explique que la réponse est non car l'ordre d'un graphe est toujours pair comme le double du nombre d'arrêtes.
`Revenons à votre application. Que se passe-t-il si on décide que chaque équipe n'en rencontrera que deux autres ?`
Euh dans ce cas, l'ordre du graphe $5 \times 2 = 10$ est pair, donc je ne peux pas d'office écarter cette organisation. Je vais faire un graphe. La candidate place alors 5 points A, B, C ,D et E qui correspondent aux équipes. Elle explique qu'en reliant chacun de ces points aux points consécutifs on trouve une organisation possible.
`Oui, n'y en a-t-il pas d'autres ?`
Euh si ... D'après elle, elle trouve péniblement un autre graphe.
`Est-ce qu'il ne suffisait pas de permuter l'ordre des sommets ?`

3. `Est-il exact de dire que le nombre de possibilités est égal au nombre de chaînes eulériennes de ce graphe ?`

4. `Revenons maintenant sur l'algorithme de Djikstra, appliqué à votre exemple. Vous avez donné des explications, mais je notais en même temps et je n'ai pas eu le temps de suivre. Pouvez vous répéter ?`
Pendant 3 minutes, la candidate reprend les premières étapes de son algorithme, pour un graphe pondéré qu'elle a donné en exemple.
`Donc cet algo donne les étapes pour avoir une chaîne de poids minimal. Existe-t-il un algorithme de ce type de plus courte chaîne, mais pour laquelle je fixe un sommet qui doit forcément être dans la chaîne ?`
Dans mon exemple, si on veut que la chaîne passe par le point G, je peux d'ores et déjà supprimer certaines arrêtes qui n'appparaitront pas dans la chaîne minimale.
`Oui, mais dans un cas général ? En utilisant deux chaînes ?`
Ah oui si je vais de D à A, je peux chercher la chaîne minimale de D à G d'une part, la chaîne minimale de G à A, et on obtient ce que l'on veut.
`Exact, et comment s'appelle ce procédé ?`
Je ne sais pas.

Et encore quelques questions 2008 sur les graphes :

1. `Est-ce que le nombre chromatique relève d'une définition, d'une propriété ?`
... `Pourquoi le nombre chromatique existe toujours ?`

2. `Est-ce que vous pouvez expliquer ce que vous appelez le coloriage d'un graphe ?`
La candidat explique.
`Pouvez-vous expliquer à un élève ?`

Exposé 3 - Coefficients binomiaux, dénombrement des combinaisons, formule du binôme. Applications.

1. La deuxième partie de l'exposé est intitulée *Formule du binôme.* La candidate énonce :
Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
Elle propose une démonstration par récurrence. Dans la troisième partie de son exposé, intitulée *Applications* , elle démontre que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a :
$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k}(-1)^k \cos^{n-2k}(x)(1-\cos^2(x))^k$. Elle propose d'appliquer la formule du binôme à l'égalité $\cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos(x) + i\sin(x))^n$. et conclut ainsi l'exposé.
`Est-ce qu'on peut reprendre la dernière démonstration : que deviennent les termes imaginaires ?`

2. `Vous avez utilisé la formule du binôme : aviez-vous le droit ?`
Oui...ah non ! En fait il faut que je la modifie : a et b peuvent être complexes.

3. `Dans votre déonstration de la formule du binôme, vous utilisez l'égalité` $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. `L'avez-vous énoncée dans votre exposé ?`
Euh...non.
`Pouvez-vous la démontrer ?`
Elle le fait en utilisant l'expression $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
`Vous utilisez l'expression de` $\binom{n}{k}$ `avec les factorielles : pouvez-vous la démontrer ?`
J'ai essayé une récurrence, mais pas réussi. Si je fixe n, pour $k = 0$, c'est bon.
`Pourquoi ?`
La candidate fournit une explication.
`Et pour l'hérédité ?`
...
`Une façon naïve de procéder : pour choisir` $k+1$ `parmi` n, `je peux commencer par choisir` k `parmi` n, `puis...il faut raffiner...`
Oui...alors $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \times (n-k)$...mais ça ne marche pas ...
`Oui, il faut corriger...`
Ah, je compte $p+1$ fois la même !

4. Dans la première partie de son exposé, la candidate définit les coefficients binomiaux. Elle écrit :
Définition : Soit E un ensemble fini dont le cardinal est n. Soit $p \in \mathbb{N}$. On appelle combinaison de p éléments de E une façon de choisir p éléments deux à deux distincts parmi n éléments. Le nombre de combinaison de p éléments parmi n, noté $\binom{n}{p}$ est appelé coefficient binomial.
`Avec votre définition, est-ce que le nombre de combinaison dépend du choix de l'ensemble` E `?`

5. `Est-ce que vous savez combien vaut` $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ `?`

2^n je crois.

`Pourquoi ?`

6. `Est-ce que vous connaissez une façon agréable de disposer les coefficients binomiaux ?`

Agréable ?

`Est-ce que vous pouvez calculer` $(x+y)^5$ `?`

Elle commence à écrire $(x+y)^5 \; = \; x^5+$

`Que vaut` $\binom{5}{1}$`? Ou plutôt` $\binom{5}{2}$ `?`

Elle écrit $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \dots$

`Oui, mais est-ce qu'il n'y a pas un moyen plus simple pour représenter et calculer les coefficients binomiaux ?`

...

`Un tableau triangulaire ?`

7. `Vous avez annoncé` $p|\binom{p}{k}$ `pour` $k \in \{1 \dots p-1\}$`. Comment le montrer ?`

On a $\binom{p}{k} \; = \; \frac{p!}{k!(p-k)!}$, d'où la divisibilité par p.

`Mais alors pourquoi est-ce faux pour` $k = 0$ `?`

Exposé 4 - Description mathématique d'une expérience aléatoire : évènements élémentaires, évènements, probabilité (on se limitera au cas où l'ensemble d'évènements élémentaires est fini).

1. Dans la première partie de son exposé, la candidate définit une expérience aléatoire comme l'étude d'un phénomène dont le résultat est le fruit du hasard. A la fin de son exposé, la candidate propose l'exercice qui suit. Une agence publie deux revues. On compte 200 abonnés. On note A l'évènement "être abonné à la première revue" et B l'évènement "être abonné à la deuxième revue". On sait que $\#A = 150$ et que $\#B = 70$. Déterminer la probabilité qu'un abonné soit abonné aux deux journaux.
`A propos de votre dernier exercice, où est le hasard ?`
On choisit un abonné au hasard.
`D'accord, alors quelles sont les probabilités, qui est` Ω `?`
L'ensemble des abonnés.
`Qui sont` A `et` B `alors ? Et quelle est la probabilité` p `définie sur` $\mathcal{P}(\Omega)$ `alors ?`

2. Dans la deuxième sous-section de sa première partie (description mathématique) la candidate traite des liens entre les deux langages : langage ensembliste et langage probabiliste. Elle donne un tableau à trois colonnes : notation, langage ensembliste et langage probabiliste. Par exemple, une des ligne est $A \cup B$, réunion, A ou B.
`Dans votre tableau, pourrait-on rajouter` $A \subset B$ `?`

3. `Que vaut` $p(A \cup B)$ `?`
On a l'égalité : $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.
`Vous pouvez la démontrer ?`
La candidate bloque.
`Utiliser un dessin !`

4. `Reprenons un problème dans une situation d'équiprobabilité. Une première urne contient une boule blanche et une boule noire. Une deuxième urne contient une boule noire. On choisit une urne au hasard (avec équiprobabilité) puis on tire une boule au hasard. Pouvez-vous définir` Ω `?`
$\Omega = \{B_1, N_1, N_2\}$.
`Attention, on fait deux choses !`
Ah, alors $\Omega = \{(U_1, B_1), (U_1, N_1), (U_2, N_2)\}$.
`Et maintenant, calculer` p `sur` $\mathcal{P}(\Omega)$

Exposé 5 - Probabilité conditionelle ; indépendance de deux évènements (on se limitera au cas où l'ensemble d'épreuves est fini). Application à des calculs de probabilité.

1. `Vous avez défini probabilité conditionelle à partir de fréquence conditionelle, quel est le lien entre fréquence et probabilité ?`

2. `Pouvez-vous écrire la définition d'une probabilité ?`

3. Si $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ est un espace probabilisé et A une partie de Ω, le candidat définit la probabilité conditionelle $p(.|A)\ :\ \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$ par $p(B|A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$.
`Il ne manque rien ?`

4. `Vous notez les probabilités conditionelles` $p(B|A)$. Connaissez-vous d'autres notations ?
Oui, p_A.
`Savez-vous laquelle est en vigueur actuellement ?`
Non.
`C'est la deuxième. Pourquoi ?`

5. `Que dire de la relation "être indépendant avec" ?`
C'est une relation d'équivalence.
`Ca veut donc dire que c'est réflexif ?`
Le candidat commence à travailler au tableau. Lorsqu'il écrit $p(A) = p^2(A)$...
`Alors existe-t-il des espaces probabilisés tels que cette relaiton soit réflexive ?`
Si on prend $E = \{\emptyset, \Omega\}$.
`A quoi ça correspond ?`
...
`Reprenez la définiton d'une probablité.`
On doit avoir $p(\Omega) = 1$ et $p(\emptyset) = 0$.
`Bon, et alors pour la symétrie ?`
Le candidat la vérifie.
`En ce qui concerne la transitivité ?`
Le candidat la vérifie...
`Bon, et bien vous êtes en train de montrer qu'il existe de tels espaces, mais qu'ils sont rares...`

Un deuxième candidat sur cette leçon.

1. Si p est une probabilité sur un ensemble Ω, et A une partie de Ω telle que $p(A) \neq 0$, le candidat écrit " On définit la probabilité conditionelle p_A par $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ ".
`Comment montrer que` p_A `ainsi définie est une probabilité ?`
Il faut vérifier que $p_A(\Omega) = 1$, et que si B et C sont disjoints, on a $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
`Est-ce qu'il ne manque rien ?`
...
`Est-ce qu'on est assuré que` p_A `prend ses valeurs dans` $[0,1]$ `?`
Ca vient du fait que p prend ses valeurs dans $[0,1]$.
`Car si` x `et` y `sont dans` $[0,1]$`, il en est de même pour` $\frac{x}{y}$ `?`

2. Le candidat énonce la formule des probabilités totale : si $(B_i)_{i \in \{1 \ldots n\}}$ est une partition de Ω, alors pour tout $A \in (\Omega)$ on a $p(A) = \sum_{i=1}^{n} \; p_{B_i}(A)p(B_i)$.
`Pouvez-vous la démontrer ?`
Dans sa réponse, le candidat parle de partition.
`Quelle est la définition d'une partition ?`
Le candidat la donne. En particulier, il explique que si $\left(B_i\right)_{i \in \{1 \ldots n\}}$ est une partition de Ω, on doit avoir pour tout i de $\{1 \ldots n\}$ l'ensemble B_i non vide.
`Dans la formule des probabilités totale, vous supposez pour tout` i `que` $p(B_i) \neq 0$.
`Est-ce vraiment nécessaire puisque les ensembles` B_i `sont non vides ?`
En effet, c'est superflu.
`Reprenons la démonstration de la formule...`

3. `Revenons sur ce point : si une partie` B `d'un espace probabilisé` Ω `est non vide, on a` $p(B) \neq 0$ `?`
Le candidat cherche.
`Considérons un dé truqué : il tombe jamais sur le 1.`
...
`Est-ce que vous pouvez formaliser ce contre-exemple ?`

4. `Pouvez-vous démontrer le théorème de Bayes ?`

Exposé 6 - Variable aléatoire à valeurs réelles dont l'ensemble des valeurs est fini. Loi de probabilité. Espérance mathématique, variance. Exemples.

1. Vous avez écrit $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p(X = x_i)x_i$ si cette série converge...

2. Pouvez-vous nous donner une idée de la preuve de la continuité de la fonction de répartition F_X ?

3. Pouvez-vous donner un exemple de lois de probabilités U et V telles que U et V ne soient pas indépendantes mais telles que $E(UV) = E(U)E(V)$?
On prend X et Y les lois de probabilité de deux lancers de dés, et on considère $U = X + Y$ et $V = X - Y$.
Et alors ?

4. Vous avez écrit la propriété $E(\lambda) = \lambda$. Que veut dire λ ici ?
Le candidat explique.
D'accord, et comment l'expliqueriez-vous à un élève ?

5. Peut-on avoir deux variables aléatoires différentes de même loi de probabilité ?

Je ne sais pas...
Par exemple on prend $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$?
...
Prenons $X(\omega_1) = X(\omega_2) = 0$ et $X(\omega_3) = 1$ d'une part, et d'autre part $Y(\omega_1) = Y(\omega_3) = 0$ et $Y(\omega_2) = 1$. Peut-on trouver une probabilité sur Ω telle que $p_X = p_Y$?

6. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons une variable aléatoire X de loi de probabilité $\mathcal{B}(n, p)$ pour $p \in]0, 1[$. Pouvez-vous calculer $E(X)$ et $V(X)$?

Exposé 7 - Schéma de Bernouilli et loi binomiale. Exemples.

1. Le candidat écrit "Notation" avant de préciser $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2$
`Que vaut` $0!$ `?`
1
`Pourquoi ?`
Par convention.
`Par convention ?`

2. L'expression schéma de Bernouilli apparaît pour la première fois au cours de l'exposé dans cette phrase : "On considère une épreuve ayant deux issues. Si on répète cette épreuve n fois dans les mêmes conditions, on peut schématiser cette expérience par un schéma de Bernouilli."
On lui demandera :
`Qu'est-ce qu'un schéma de Bernouilli ?`
...
`Si je tire` p `fois une boule sans remise ?`

3. `Est-ce que les probabilités font partie des mathématiques ? Qu'est-ce qu'une probabilité ?`

4. `Si` X `suit une loi binomiale, quelle est la loi de probabilité de` X `?`
Le candidat donne la réponse.
`Alors que vaut l'espérance de` X `?`

5. `Si on considère la somme de` n `variales aléatoires suivant la même loi de Bernouilli, est-ce qu'on obtient une variable aléatoire suivant une loi binomiale ?`

Et voici les questions posées à un candidat en 2007 :

1. `Pour définir une variable aléatoire` X`, ne doit-on pas introduire d'autres objets avant ?`
...
`Un couple` (Ω, P) `?`

2. `Est-ce qu'une variable alèatoire est une application ?`
...
`Quels sont ses ensembles de départ et d'arrivée ?`

3. `Alors,est-ce qu'on peut reprendre précisément la définition de la loi binomiale ?`
C'est une expérience aléatoire répétée.

4. `Est-ce que vous pouvez refaire le calcul de l'espérance ?`
J'utilise la définition de l'espérance, pour obtenir la somme...
`D'accord. Sinon, comment se comporte l'espérance par rapport à l'addition ?`
Il y a la la linéarité.
`Alors est-ce qu'il y aurait une deuxième méthode pour le calcul de l'espérance ?`

Une question posée à un autre candidain 2007 :
`Quel est le lien entre une variable aléatoire qui suit une loi binomiale, et les` n `variables aléatroires associées aux différentes épreuves ?`

Exposé 8 - Séries statistiques à deux variables numériques. Nuage de points associé. Ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Droites de régression. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

L'exposé s'appuie sur deux transparents et une utilisation intensive de la calculatrice. Il est situé au niveau Terminale ES.

1. `Vous avez prononcé le mot résidus. Quelle en est la définition ?`

2. Lors de la manipulation de la calculatrice pour trouver la droite de régression linéaire, la calculatrice (une TI) affiche les valeurs $a = ...$, $b = ...$ et $r = ...$. La candidate précise que r a une signification, mais qu'elle n'en parlera pas car c'est hors du programme de la Terminale ES.
`Quelle est la définition de` r `? Quelles valeurs peut prendre` r `? Qu'est-ce que ça signifie quand` r `est proche d'une certaine valeur ?`
La candidate répond.
`Quand même,` r `est le seul moyen pour dire si une droite est bonne ou pas. Quel est votre point de vue en tant que futur prof ?`
...
`Même si ce n'est pas au programme, comment l'introduire dans un TP ?`

3. `La covariance, à quoi ça vous fait penser ?`
...
`Un membre du jury à l'autre : Mais à quoi tu penses ?`
`Je dois m'égarer : aux formes quadratiques.` (rires)

Questions posées à une autre candidate sur le même exposé :

1. `Est-ce que vous pouvez nous démontrer l'existence et l'unicité de la droite de régression linéaire ?`

2. `Quelle est la différence entre probabilités et statistiques ?`

Exposé 10 - Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, unicité du quotient et du reste. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

L'exposé est en trois parties. La première est une présentation de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$. La deuxième partie est intitulée "Applications". La première de ces applications est l'algorithme d'Euclide. Viennent ensuite les sous-groupes de $\mathbb{Z}$, la numération en base b et les congruences dans $\mathbb{Z}$.

1. Une des propositions de la partie sur les congruences est celle-ci :
Si $x = y\ (n)$, alors x et y ont même reste dans la division par n.
`Cette proposition admet-elle une réciproque ?`

2. `Il était question dans l'intitulé de calculatrice. Avez-vous des idées ?`
L'algorithme d'Euclide se prête bien à un calcul.
`Et vous avez une idée pour illustrer Euclide à la calculatrice ?`

3. Pour justifier la terminaison de l'algorithme d'Euclide, la candidate a considéré la suite des restes obenus (r_n). Elle a écrit :
La suite (r_n) est strictement décroissante et ses éléments sont strictement positifs. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $r_N = 0$.
`Dans l'algorithme d'Euclide, vous définissez une suite` (r_n)`...deuxième tableau à droite...Qu'en pensez-vous ?`
...
`Qu'est-ce qu'elle a de particulier cette suite ?`
Au bout d'un moment la suite prend la valeur 0.
`Comment ça s'appelle ?`
On parle de suite stationnaire.
`Bon, et est-ce qu'une suite stationnaire peut être strictement décroissante ?`

4. `Vous avez dit que le dernier terme non nul de la suite` (r_n) `était le p.g.c.d recherché. Vous pouvez justifier ?`

5. `Est-ce que vous pouvez écrire 123 en base 2 ?`

Un deuxième candidat sur cet exposé. Il insiste dans son exposé sur la numération en base b. Il explique choisir $b \geq 2$, sinon on n'y gagne rien par rapport à compter sur ses doigts !

1. Pour montrer l'existence du reste et du quotient, le candidat donne un algorithme constructif.
`Et en quoi est-ce que ça prouve l'existence ?`
Parce qu'on montre que l'algorithme termine.

2. `Pouvez-vous démontrer que l'algorithme d'Euclide donne bien le p.g.c.d des deux nombres ?`

3. Le candidat a programmé l'algorithme sur sa calculatrice, et utilise sa procédure sur un exemple.
`Montrez nous comment ça marche. Quel est le test d'arrêt ?`

4. `Dans le programme de Terminale, il y a la notion "avoir le même reste". Comment l'introduiriez-vous ?`
Je définirai $a = b\ (n)$ par $n \mid (a-b)$.
Ensuite, je démontrerai la proposition suivante : $a = b\ (n)$ si et seulement si a et b ont même reste dans la division euclidienne par n.
`Montrez le.`

Et voici un troisième candidat !

1. Dans la première partie sur la divisione uclidienne, le candidat rappelle que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \quad \exists! (q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid a = bq + r \ \text{ et } \ r < q$$

`Est-ce qu'on peut reprendre ce résultat ?`
Comme le candidat ne voit pas, on passe.

2. Si n est un nombre premier supérieur à 3 et x non multiple de n, vous avez un candidat pour l'inverse de $\overline{n}$?
Je ne vois pas.
`Connaissez-vous le petit théorème de Fermat.`
Le candidat l'écrit.
`Alors ?`

3. Revenons à la relation de congruence $x = y\ (n)$. Peut-on prendre x, y et n dans $\mathbb{Z}$?
Non, plutôt $n \in \mathbb{N}$.
Et si $n = 0$?
Et bien $\frac{\mathbb{Z}}{0\mathbb{Z}} = 0$.
`Sûr ?`

4. `Qu'est-ce qu'un groupe cyclique ?`

5. `L'anneau` $\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ `est-il intègre ?`
Oui.
`Pourquoi ? Et qu'est-ce que ça veut dire précisément, intégre ?`

6. `Revenons à la première question (question 1. pour vous lecteur) : comment modifier l'énoncé de ce théorème de divison pour le rendre correct ?`

7. Pour démontre le théorème de division euclidienne, le candidat envisage l'ensemble $\mathcal{D} = \{n \in \mathbb{Z} \mid nx \leq a\}$, puis pose $d = \max\ \mathcal{D}$.
`Quelle propriété utilisez-vous ici ?`

Questions posées à un autre candidat :

1. `Vous avez dessiné des patates pour les classes d'équivalence, faites des maths.`

2. Pour illustrer la preuve par 9, le candidat a donné l'égalité (fausse!) $542 \times 3 = 1127$.
`L'erreur que vous détectez par la preuve par 9 se voit facilement ici...`
Oui, avec la parité en fait.
`Vous pouvez nous donner un exemple où la preuve par 9 ne détecte pas une erreur ?`

Exposé 11 - PGCD de deux entiers naturels. Nombres premiers entre eux. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

1. La candidate passe vite sur une de ses application : une fleuriste dispose de x roses et de y tulipes, quelles sont les différentes façons de composer des bouquets semblables en utilisant toutes les fleurs ?

`Est-ce que vous pouvez expliquer l'application des bouquets ?`

2. `Est-ce que vous pouvez nous montrer l'algorithme d'Euclide.`
...
`Comment sait-on qu'il s'arrête ?`
Avec la suite des restes.
`Plus précisément ?`
Elle est décroissante à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc converge vers 0.
`Peut-on montrer qu'une suite d'entiers positifs décroissante tends vers 0 ?`

3. `Reprenons le programme que vous nous avez présenté et qui calcule le p.g.c.d de deux nombres. Appliquez le avec` -3 `et` 6.
...La calculatrice indique un message d'erreur.
`Est-ce que vous pouvez nous expliquer pourquoi au tableau?`
...
`Ok, et que devrait renvoyer la calculatrice en fait ?`

Un autre candidat 2007 propose lors de l'exposé un algorithme d'Euclide...qui ne fonctionne pas :

1. `Est-ce qu'on peut reprendre l'algorithme d'Euclide ?`
D'après les souvenirs qu'en a le témoin de l'épreuve, une grande partie du temps de question est consacrée à discuter de cette correction.

2. `Pourquoi ce nom de plus grand diviseur ?`

3. `En quelle classe voit-on le p.g.c.d pour la première fois ?`

Exposé 12 - Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$. Egalité de Bezout. Résolution dans $\mathbb{Z}$ d'une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

1. `Résoudre` $15x + 21y = 7$ `dans` $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Il n'y a pas de solutions.
`Pourquoi ?`

2. `Résoudre` $15x + 21y = 6$ `dans` $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. (On demandera beaucoup de précision au candidat).

3. `Trouver les sous-groupes de` $6\mathbb{Z}$ `qui contiennent` $2\mathbb{Z}$.
`Trouver les sous-groupes de` $2\mathbb{Z}$ `qui contiennent` $6\mathbb{Z}$.

♣ Pourquoi résoudre de telles équations ?

Exposé 13 - Nombres premiers; existence et unicité de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Infinitude de l'ensemble des nombres premiers. Exemple(s) d'algorithme(s) de recherche de nombres premiers. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

1. Un exemple d'application est le suivant : si $m = \prod p_i^{\alpha_i}$ et si $n = \prod p_i^{\beta_i}$ (avec les α_i et β_i dans $\mathbb{N}$) alors le p.g.c.d de m et de n est $\prod p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}$.
`Etes-vous sûr de votre application ?`
Il faut changer le max en min.
`Qu'est-ce qu'on obtient avec le max ?`

2. `Est-ce que vous pouvez démontrer le théorème de décomposition en nombres premiers ?`

3. Dans l'exposé, on trouve le lemme suivant :

Lemme : Soit p un nombre premier. Pour tout entier k tel que $0 < k < n$, on a $p \mid \binom{p}{k}$.

`Est-ce que vous pouvez-démontrer ce lemme ?`

On utilise $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$.

`Quel théorème utilisez-vous alors ?`

Le théorème de Gauss.

`Quels en sont les hypothèses précises ?`

4. `Est-ce que` 237 `est premier ?`

Appliquons le crible.

`Jusqu'au faut-il tester la divisibilité ?`

Jusqu'à $E(\sqrt{237})$.

`Ce qui vaut ? Et pourquoi en fait s'arrêter à` $E(\sqrt{(n)})$ `?`

5. Finalement, on s'arrête vite car :

3 divise 237.

`Comment le savez-vous ?`

La somme des chiffres vaut 12.

`Pourquoi ça marche ?`

6. `Et avec` 239 `?`

7. `Connaissez-vous un critère de divisibilité par` 11 `? Par` 8 `? Par` 7 `?`

8. `Soit` p `premier supérieur à` 5`. Est-ce que` p `premier divise` $\sum_{k=0}^{p-1} (p+k)^2$ `?`

9. `Pourquoi a-t-on` $6 \mid (n+1)(2n+1)$ `?`

Voici les questions posées à un autre candidat :

1. `Est-ce que vous pouvez démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini ?`

2. Le candidat a énoncé le théorème de décomposition d'un entier en facteurs premiers, et annoncé qu'il pouvait se montrer par récurrence forte.
`Est-ce que vous pouvez montrer le théorème de décomposition par récurrence forte ?`

♣ En quelles classes le théorème de décomposition en nombres premiers est-il énoncé ? Est-il démontré ?

3. Un des lemmes énoncé est le suivant :
Lemme : Si un nombre premier p divise un produit de nombres premiers, alors p est égal à un des facteurs.
`Mais 6 divise` 2×3`, et pourtant 6 n'est égal ni à 2 ni à 3 ?`

Ces questions ont été posées à un autre candidat :

1. `Qu'est-ce qu'un nombre premier ?`
C'est un nombre qui n'est divisible que par 1 et par lui même.
`Qu'est-ce qu'un nombre ?`
Je voulais dire un entier.
`Est-ce que 1 est premier ?`
♣ Et qu'est-ce que ça change ?

2. Le candidat a proposé un algorithme sur la calculatrice qui teste si un nombre est premier. Une boucle pour i variant de 2 à $n-1$ teste si i divise n.
`Comment améliorer simplement l'algorithme ?`
...
`Peut-être peut-on changer la borne, ou le type de boucle, ou encore facilement éliminer un test sur deux ?`

Entre en scène un candidat 2008 :

1. Dans la première partie de l'exposé, intitulée *Nombre premier* le candidat a posé la définition suivante :
Définition : Lorsque a est divisible uniquement par 1 ou lui-même, on dit que a est premier.
`Est-ce que votre définition s'applique à 1 ?`
...
`Est-ce que 1 est premier ?`

2. Dans la deuxième partie de son exposé, intitulée *Décomposition en nombres premiers* le candidat énonce :
Soit n un entier naturel. Si n n'est pas un nombre premier, alors il existe une seule et unique décomposition de n en facteurs premiers : $n = \prod_{i=1}^{p} a_i^{\alpha_i}$ avec les a_i premiers et les α_i entiers.
`Vous avez dit ici...si` n `n'est pas premier. Et si` n `est premier ?`

3. Le candidat a commencé la démonstration de l'énoncé précédent ainsi :
Démonstration : Existence : si n n'est pas premier, il existe a_1 premier qui divise n, et donc $n = q_1 a_1$. On continue jusqu'à ce que q_1 soit premier.
`Revenons sur votre démonstration. On voit bien que ça marche, intuitivement. Mais les maths, ce n'est pas que l'intuition.`
...
`Quelle propriété utilisez-vous ?`
...
`Quelle propriété a l'ensemble des diviseurs de` n `?`

4. `Vous avez dit :` a_1 `divise un produit de facteurs, donc divise un de ces facteurs. C'est faux en général. Pouvez-vous donner un contre exemple ?`

5. Dans la troisième partie de son exposé intitulée *Algorithme*, le candidat propose de chercher tous les nombres premiers inférieurs à 100. Pour cela, il teste la divisibilité par tous les nombres premiers inférieurs à 7.
`Dans votre algorithme, pourquoi s'arrêter à 7 ?`
Le premier suivant est 11, et $11^2 > 100$.
`Quelle propriété utilisez-vous ? Pouvez-vous la démontrer ?`

6. `Est-ce que vous connaissez des applications de la décomposition en nombres premiers au calcul de p.g.c.d, p.p.c.m, ou nombres de diviseurs ?`
...
`Ecrivez` $n = \prod p_i^{\alpha_i}$.
Les diviseurs de n sont les $n = \prod p_i^{\beta_i}$ avec $\beta_i \in \{0 \dots \alpha_i\}$.
`Combien il y en a ?`

7. `Est-ce que vous aviez prévu quelque chose avec la calculatrice ?`

♣ Qu'est-ce que cela change de considérer 1 premier ou pas ?

Exposé 14 - Congruences dans $\mathbb{Z}$. Anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.

1. Le candidat a écrit : $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ n'est pas unitaire. En effet, $\overline{2}.\overline{3} = \overline{0}$ dans $\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$.
`Il faut corriger cette ligne.`
Ah...oui. Le candidat corrige l'erreur.
`Comment appelle-t-on des éléments comme` $\overline{2}$ `et` $\overline{3}$ `?`

2. `Vous dites que l'on note` $\overline{0}$,$\overline{1}$ `et enfin` $\overline{n-1}$ `les éléments de` $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$. `Est-ce que c'est juste une notation, ou est-ce que c'est une propriété ?`
C'est une égalité d'ensemble.
`Mais est-ce qu'on ne dit pas plus dans cette phrase ?`

3. `Pour des gens qui ne connaissent pas ces anneaux` $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, `voyez-vous une façon plus simple de les représenter ?`
Par exemple, si on note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$.
`Il faut être plus précis.`
Dans le plan euclidien. Donc c'est l'anneau $\{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}$. Ou alors les racines n-iemes de l'unité.
`Dans les deux cas, quelles sont les lois ?`

4. `Pouvez-vous montrer la compatibilité de la multiplication dans` $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ `au niveau Terminale ?`

5. `Vous avez dit que la relation` $n|a-b$ `est d'équivalence. En connaissez-vous d'autres sur` $\mathbb{Z}$ `qui soient également compatibles avec les lois d'addition et de multiplication ?`

6. Le candidat a énoncé le théorème suivant : si $a \in \mathbb{Z}^*$ et si $a^n = 1$, alors $a^{\phi(n)} = 1\ (n)$. Puis, il énonce le théorème de de Fermat comme corollaire : si a est dans $\mathbb{Z}^*$ et si p est premier, alors $a^{p-1} = 1\ (p)$.
`Ne faut-il rien ajouter dans les hypothèses de votre corollaire ?`
Oui, que a et p sont premiers entre eux.
`Oui, et sans rajouter cette hypohèse, comment corriger l'énoncé ?`

7. `Calculez` $\phi(8)$ `?`
Il y a une formule...
`Et avec la définition ?`

♣ Connaissez-vous des applications où intervient ϕ ?

Une autre candidate nous propose d'autres questions :

1. Aprés avoir montré que la congruence modulo n est une relation d'équivalence, la candidate définit $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$. Le théorème suivant de l'exposé affirme qu'il s'agit d'un anneau.
`Pourquoi la loi d'addition est-elle définie ?`

2. `Est-ce qu'un corps est intègre ?`
Oui.
`Pourquoi ?`
La candidate explique.
`Et est-ce qu'un anneau intègre est un corps ?`
Pas forcément...
`D'accord, alors est-ce qu'avec une condition supplémentaire on ne peut pas montrer qu'un anneau intègre est un corps ?`
♣ Si A est un anneau fini intègre, montrer que pour tout $a \in A \setminus \{0\}$ l'application $\phi : A \to A$ définie par $x \mapsto ax$ est injective.
♣ Que dire d'une application injective entre ensembles finis de même cardinal ?
♣ Pouvez-vous donnner un exemple d'anneau intègre qui ne soit pas un corps ?

Un autre candidat en 2007 :

1. `Pourquoi est-ce que la congruence est une relation d'équivalence ?`

2. `Vous dites qu'on obtient des classes d'équivalence...que faut-il en fait pour obtenir des classes d'équivalence ?`

3. `Qu'est-ce exactement que` $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ `?`
...
`Qu'est-ce exactement qu'un représentant d'une classe ?`
...
`Pourquoi écrit-on` $\overline{n}$ `?`

4. `Quelle est la définition d'un anneau ?`
...
`Que faut-il vérifier pour montrer que` $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ `est un anneau ?`

5. `Revenons à` $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$`...Quelle est sa définition ?`

Exposé 15 - Construction du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels. Propriétés.

1. La troisième propriété énoncée dans l'exposé est la suivante :
Tout rationnel peut être approché par un décimal.
Ensuite il est expliqué que si on considère des entiers a et b tels que $a \geq b$, on définit les suites (r_k) et (q_k) telles que
$a = bq_0 + r_0$ et telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait $10^{k+1} r_k = bq_{k+1} + r_{k+1}$ On définit alors la suite (x_k) par l'égalité $x_k = q_0 + \frac{q_1}{10} + \ldots + \frac{q_n}{10^n}$. La candidate dit que (x_n) est valeur approchée de $\frac{a}{b}$.
Elle ne rajoute ni ne démontre rien d'autre.
`Que voulez-vous dire par : tout rationnel peut être approché par un décimal ?`
Que $\frac{a}{b} - d$ tend vers 0.
d `?`
Que $\frac{a}{b} - x_n$ tend vers 0.
`Est-ce qu'on peut le démontrer ?`
...on montre que $x_n - \frac{a}{b} = \frac{r_{n+1}}{10^{n+1} b}$.
`Pourquoi ?`
On le montre par récurrence.
`Vous pouvez le faire ?`
La candidate écrit :
$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)\ :\ \frac{a}{b} = \sum_{k=0}^{n} \frac{q_k}{10^k} + \frac{r_{n+1}}{10^n}$
`Est-ce qu'il n'y a pas un problème ?`

2. `Si` $a < b$`, on ne peut plus appliquer votre algorithme ?`

3. Dans la première partie de son exposé, la candidate a défini une relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.
Dans une première proposition elle affirme que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Ensuite elle écrit au tableau :
Notation : $\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*}{\mathcal{R}} = \mathbb{Q}$;
Un élément de $\mathbb{Q}$ sera noté $\frac{a}{b}$.
`Pouvez-vous expliquer ce que sont ces éléments de` $\mathbb{Q}$ `?`
...
`Vous dites que ce sont les` $\frac{a}{b}$ `?`
Ce sont les classes d'équivalence des $\frac{a}{b}$.
`Quelle est la classe de` $\frac{a}{b}$ `?`
C'est l'ensemble des (a', b') tels que $(a, b)\mathcal{R}(a', b')$.
`Est-ce qu'on peut écrire à nouveau la définition de` $\mathbb{Q}$ `?`

Encore un exposé 2008 :

1. `Pouvez-vous préciser la relation d'équivalence utilisée pour définir` $\mathbb{Q}$ `?`

2. `Pouvez-vous expliquer comment est définie l'addition entre deux éléments de` $\mathbb{Q}$ `?`

Le candidat explique.

`Pouvez-vous montrer la compatibilité ?`

3. `Savez-vous montrer l'irrationalité de` $\sqrt{2}$ `?`

Exposé 17 - Module et argument d'un nombre complexe. Interprétation géométrique, lignes de niveaux associées.

1. Pour situer, l'exposé est en trois parties (avec sous-parties) : module d'un nombre complexe (définition, module, propriétés et interprétation géométrique), argument d'un nombre complexe(définition, propriétés, interprétation géométrique) et lignes de niveau ($|z| = k$, $|z-\omega| = k$, $|\frac{z-a}{z-b}| = k$ et $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = k$).

`Avec plus de temps, qu'auriez-vous fait ?`

2. `Peut-on reprendre la définiton du module et de l'argument ? Comment sont définis des angles de droites ?`

3. `Peut-on définir l'argument de tout point du plan ?`
Il faut $z \neq 0$?
`Et le module, peut-il être défini partout ?`

4. `Vous écrivez` $z = a + ib$. `Précisez.`

5. `Vous écrivez` $\sqrt{z\overline{z}}$.
Oui...
`Que pensez-vous de` $\sqrt{1+2i}$.
Pas possible.
`Qu'est-ce que ça sous-entend quand on écrit` $\sqrt{z\overline{z}}$?

6. `Comment montrer que` $|z_1 z_2| = |z_1|.|z_2|$.
Le candidat propose une réponse.
`Et pour le quotient ?`

7. `Vous avez écrit` $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ `pour` $z_1 \in \mathbb{C}$ `et` $z_2 \in \mathbb{C}^*$. `Est-ce que c'est vrai ?`

Exposé 18 - Interprétation géométrique des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par $z \mapsto z+b$, $z \mapsto az$ et $z \mapsto \overline{z}$ où a et b appariennent à $\mathbb{C}$, a non nul. Exemples d'applications à l'étude de configurations géométriques du plan.

Afin de conserver son anonymat nous appelerons Pierre le candidat qui nous confie ses impressions sur son épreuve. Pierre situe l'exposé au niveau Terminale S sans spécialité maths. La première partie du plan intitulée "Affixes" comprend la présentation du repère, la définition d'affixe, de la notation $M(z)$ pour le point d'affixe z, les interprétations géométriques du module et de l'argument ainsi qu'une propriété donnant l'affixe d'un barycentre. La deuxième partie est intitulée "Similitudes". Le premier paragraphe donne les interprétations géométriques des applications $z \mapsto z+b$, $z \mapsto e^{it}z$, $z \mapsto kz$ (avec $k \in \mathbb{R}$) et $z \mapsto \overline{z}$. Le deuxième paragraphe de cette partie concerne les transformations $z \mapsto az$ avec $a \in \mathbb{C}$. Pierre propose dans la troisième partie de son exposé des applications à l'étude de configurations du plan.

Pierre a donné cette définition :
Définition : Si $M_1(z_1), \ldots, M_n(z_n)$ sont des points, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels de somme non nulle, alors le barycentre G du système des points $M_i(z_i)$ affectés des coeffcients λ_i est d'affixe $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i$.
`Est-ce qu'on peut revenir sur cette propriété ?`
Oh pardon...

2. `Pourquoi votre construction de l'hexagone est-elle redondante ?`
On peut se servir du fait que les triangles intérieurs sont équilatéraux ?
`Pourquoi le sont-ils ?`
On peut utiliser le module.
`Il doit y avoir plus simple ?`

3. `D'aprés votre définition d'homothétie, il y a des homothéties de rapport nul ?`
Pardon, ma définition ne doit pas être standard.
`Qu'est-ce qui justifie l'exclusion de l'homothétie de rapport nul ?`
Je ne vois pas, puisque je l'ai incluse.
`Quelle est la définition d'une transformation ?`
On parle d'ensemble de transformations si l'inverse d'une transformation en est une, et si la composée de deux transformations en est une.
`Non, une transformation c'est une application bijective.`
Alors, pour l'homothétie de rapport 0 qui envoie tout le monde sur son centre, c'est rapé.

4. `Je suis surprise par votre plan.`
Je suis désolé pour cette première partie de rappels.
`Pas du tout, ça c'est parfait. Mais pourquoi traiter à part` $z \mapsto kz$ `et` $z \mapsto e^{it}z$ `au lieu de traiter d'un coup` $z \mapsto az$ `?`
Car les élèves de Terminale S ont sans doute déjà vu dans leur scolarité les homothéties et les rotations, mais pas leurs composées. C'est un simple artifice pédagogique.

5. `Pouvez-vous caractériser l'application` $z \mapsto iz + b$ `?`
C'est la composée d'une rotation et d'une translation, donc une rotation ou une translation. Cherchons les points fixes : on trouve $\frac{1}{1-i}$. On a donc $f(z) = i\frac{z-1}{1-i} + \frac{1}{1-i}$. C'est donc la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre le point d'affixe $\frac{1}{1-i}$.
`D'angle` $\frac{\pi}{4}$ `?`
Euh... $\frac{\pi}{2}$ bien sûr.
`D'où sortez vous ce` $f(z) = i\frac{z-1}{1-i} + \frac{1}{1-i}$ `?`
Pour tout w il existe t tel que $f(z) = i(z - w) + t$. Mais pour w point fixe, on a $t = w$.
`Est-ce pédagogique comme présentation ?`
Non, mais là mon stress a pulvérisé toute tentative de pédagogie.

6. `Revenons sur cette caractérisation du triangle équilatéral par les affixes.`
`Est-ce qu'il n'y a pas plus simple ?`
On a également $|a - b| = |c - a| = |c - b|$. Cette formule est facile à obtenir à partir de l'autre, et le contraire est possible aussi, mais moins trivial.
`Bien, vous voyez donc bien en quoi ce que vous dites est redondant ?`
Non.
`Non ?`

Voici une question posée à un autre candidat qui propose de montrer en utilisant les nombres complexes que les diagonales d'un losange se coupent perpendiculairement :
`Est-ce qu'on peut le démontrer avec les outils d'une classe de cinquième ?`

Mais on me reporte un exposé 2007 avec le même intitulé.

1. Le candidat énonce un théorème 4 : il existe un isomorphisme f entre le plan complexe et le plan affine.
`Dans votre théorème 4, quelles sont les qualités de` f `?`
C'est un isomorphisme.
`Pour quelles structures ?`
...
`Quelle est la structure de` $\mathbb{C}$ `?`
Un corps.
`Et le plan affine ?`
C'est un espace affine.

2. Tout le long de l'exposé, le candidat parle de l'application en nombres complexes "affine" et de "l'application vectorielle associée". On lui demande : `Ces notations ne sont-elles pas lourdes ?`
Oui en effet c'est assez abstrait.
`J'ai une certaine habitude de l'abstraction mathématique mais là je commence à avoir mal à la tête.`

3. Dans un exercice proposé par le candidat on donne les coordonées de quatre points du plan. L'objectif est de démontrer que c'est un parallèlogramme. L'énoncé suggère d'utiliser une homothétie.

`Dans votre exercice, vous montrez que votre quadrilatère est un parallélogramme en utilisant une homothétie. Ne peut-on faire plus simple ?`
En calculant la longueur des côtés.
`Est-ce que cela serait vraiment judicieux ?`
...
`Et en utilisant les affixes ?`
On pourrait calculer les affixes des milieux des diagonales.
`Et votre exercice serait fait en 2 minutes... Pas besoin d'homothéties.`

4. `On a défini quelques applications dans cet exposé, peut-on les composer ? Par exemple, les applications de la forme` $z \mapsto az + b$ `?`
C'est la composée d'une rotation, d'une homothétie et d'une translation.
`Quelle est la nature de cette transformation ?`
...
`Admet-elle un point fixe ?`
Non... car il y a une translation.
`Moi je pense qu'il y a un point fixe. peut-on le calculer ?`

5. `Quelle est la particularité de l'homothétie de rapport` k `lorsque` $k = 0$, `que vous permettez avec votre définition ?`
Elle n'admet pas de fonction réciproque.
`Et alors ?`

Exposé 19 - Etude de la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f\ :\ z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$, où a,b sont complexes. Lignes de niveau pour le module et l'argument de la fonction f. Applications.

1. `Vous avez parlé d'un repère de ℂ. Qu'a-t-il de spécial ce repère ?`

2. `Vous avez parlé d'une translation de vecteur` b. `Est-ce vraiment ce que vous vouliez dire ?`

3. `Comment trouver le lieu des points` $M \in \mathcal{P} \setminus B$ `tels que` $\frac{MA}{MB} = k$ `pour` $k > 0$ `et` $k \neq 1$ `?`

Je peux le faire analytiquement, mais ça prend du temps.

`D'accord, alors géométriquement.`

Quelques calculs plus loin, le candidat arrive à $(\vec{MA} - k\vec{MB}).(\vec{MA} + k\vec{MB}) = 0$.

`On peut sans doute simplifier ?`

Je ne vois pas.

`Peut-on remplacer` $\vec{MA} - k\vec{MB}$ `par quelque chose de plus simple ?`

Oui, on peut introduire le barycentre.

`Allez-y.`

...Quelques calculs plus loin, on arrive à $\vec{MG}.\vec{MG'} = 0$. `Et puis ?`

Et donc c'est le cercle de diamètre GG'.

`D'où ça vient ?`

4. `Vous venez d'écrire` $\vec{MG}.\vec{MG'} = 0 \ \Rightarrow\ MG \perp MG'$. `Est-ce qu'on a une réciproque ?`

5. `Que peut-on dire de` G `et` G' `par rapport à` A `et` B `?`

6. `Regardons le problème du lieu des points` M `tels que` $(\vec{BM}, \vec{AM}) = k\ (2\pi)$, `dans le cas où` $k \neq 0\ (2\pi)$. `Vous dites que c'est un cercle passant par` A `et` B. `C'est sûr ?`

...

`Est-ce qu'on peut essayer avec` $k = \frac{\pi}{4}$ `?`

7. `Vous avez parlé de l'inversion` $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$. `Pouvez-vous préciser ?`

8. `Si on note` $Z = \frac{1}{\bar{z}}$, `comment exprimer` z `en fonction de` Z `?`

`Le candidat le fait.`

`Et alors ?`

Exposé 23 - Droites et plans dans l'espace. Positions relatives ; plans contenant une droite donnée.

1. `Vous définissez le faisceau de plans sécants suivant une droite comme l'ensemble des plans contenants cette droite, êtes-vous sûr que c'est la définition complète ?`
Non, on peut compléter en ajoutant le faisceau engendré par deux plans parallèles, mais comme le titre de la leçon ne parlait que des plans contenant une droite donnée j'ai préféré abréger la définition. Mais la propriété que j'ai indiquée pour les combinaisons linéaires d'équations cartésiennes est vraie aussi dans ce cas là.

2. `Vous parlez des positions relatives de deux droites quand leurs vecteurs sont non colinéaires. Pouvez-vous montrer qu'alors leurs intersection est soit vide soit un singleton?`
Il suffit de supposer qu'on trouve deux points A et B dans leur intersection : le vecteur $\vec{AB}$ non nul dirige les deux droites et il y a contradiction avec l'hypothèse des deux vecteurs directeurs non colinéaires.

3. `Pour démontrer l'écriture de l'équation cartésienne d'un plan, vous utilisez le produit vectoriel des deux vecteurs engendrant la direction. Vous avez défini un repère ?`
Oui un repère orthonormé.
`Mais le produit vectoriel suppose quelque chose sur votre repère ?`
Il est orienté.
`Donc votre démonstration ne marche que dans un repére orienté, comment l'améliorer ?`
Et bien il suffit de prendre un vecteur orthogonal quelconque, pas besoin du produit vectoriel.

4. `Au sujet de la réciproque : pour montrer que toute équation de ce type défini un plan, vous dites que vous prenez une solution particulière. Est-on sûr qu'il en existe une ?`
Oui, dans $ax + by + cz + d = 0$, j'impose $x = y = 0$ et je trouve $z = -\frac{d}{c}$ qui me donne une solution particulière mais attention car je ne suis pas sûr que c soit non nul. Par contre je sais qu'au moins un des trois a b ou c est non nul donc rien ne m'empêche d'imposer c non nul et de revenir à ce résultat si je me trouvais dans le cas contraire.
`Et ensuite ?`
On cherche deux vecteurs orthogonaux à (a, b, c), et on montre que le plan passant par ma solution particulière et dirigé par mes deux vecteurs est défini par mon équation.

Exposé 24 - Théorème de Thalès. Applications à la géométrie du plan et de l'espace.

1. L'exposé commence par l'énoncé du théorème de Thalès : soient deux droites (MN) et (CN) sécantes en un point A. Si (MN) est parallèle à (BC), alors on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$. Trois figures illustrent cet énoncé, selon les positions relatives de BC, de MN et de A.

Faire un dessin reprendre

`Quelle est la différence entre les figures 1 et 2 ?`
La figure 1 est enseignée en classe de quatrième.
`Et pour vous, quelle est la différence ?`

2. `Peut-on résumer en un seul théorème ?`
...
`Vous ne parlez que de longueurs. Ne peut-on donner un résultat plus puissant ?`
♣ Quelles versions du théorème enseigne-t-on, et dans quelles classes ?

3. L'exposé comprend l'énoncé donné à la question 1, sa démonstration, puis une partie sur la projection dans le plan.
`Comment enrichir ce théorème de Thalès ?`
...
`Par exemple, quel est le théorème de Pythagore ?`
Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
`Et si on sait que` $BC^2 = AB^2 + AC^2$ `?`
Oui, on a la réciproque.
`Et pour Thalès ?`

4. `Est-ce que vous pouvez démontrer la réciproque du théorème de Thalès ?`

5. `Qu'est-ce qu'une application affine ? Quel rapport avec le théorème de Thalès ?`

Exposé 25 - Définition et propriétés du barycentre de n points pondérés. Application à l'étude de configurations du plan ou de l'espace.

1. Le candidat n'a pas mentionnée dans son exposé la propriété d'homogénéité du barycentre.
On commence par lui demander :
`Qu'est-ce que la propriété d'homogénéité du barycentre ?`

2. `Lorsqu'un point` M `appartient à une droite passant par deux points` A `et` B, M `est alors barycentre de` A `et` B. `Pouvez-vous me dire quels sont les coefficients barycentriques ?`

3. `Vous avez écrit les coordonnées dans un repère orthonormé du barycentre de` n `points pondérés. L'orthonormalité du repère est-elle utile ?`
Le candidat répond.
`Est-ce que ça change qu'on soit en dimension` 2 `ou` 3 `?`

4. `L'expression des coordonnées du barycentre change-t-elle si on change l'origine du repère ?`

5. `Si on se place en dimension` 2, `pouvez-vous écrire l'affixe du barycentre de` n `points pondérés ?`

6. `Quel est l'isobarycentre d'un polygône régulier à` n `côtés ?`
Le candidat répond.
`Pourquoi?`

7. `Le centre du cercle inscrit dans un triangle ABC s'exprime comme barycentre des points` A, B `et` C. `Quels sont les coefficients barycentriques ?`
Le candidat répond à la question.
`Pouvez-vous démontrer ce résultat ?`

Exposé 28 - Projection orthogonale sur une droite du plan, projection vectorielle associée. Applications (calculs de distances et d'angles, optimisation...).

1. L'équation de la droite Δ est donc $3x + 2y - 4$.
`Est-ce qu'il ne manque rien ?`

2. Le candidat a réalisé une procédure à la calculatrice pour construire le projeté orthogonal d'un point sur une droite donnée. Il trace la droite passant par ces deux points. Enfin, il vérifie à l'aide d'une procédure intégrée sur la calculatrice que les deux droites sont bien perpendiculaires.

`Quel est l'intérêt pédagogique de votre construction ?`
Pour vérifier...
`Vous réalisez donc la construction à l'envers ?`
D'aprés le témoin de cette scène : il s'ensuit un long moment pendant lequel le candidat et le jury ne s'entendent pas sur ce qui est ou a été fait. Le candidat souhaite en fait vérifier que sa construction est bonne. Sans doute est-il utile d'être très explicite.

3. Pour définir la projection sur une droite AB, le candidat réalise une construction utilisant ces points A et B.
`Et si on considère deux autres points de cette droite` AB `?`
...
`Est-ce que la projection sur une droite dépend du choix de deux points sur cette droite ?`
Non, on peut la définir à l'aide d'un vecteur $\vec{u}$ qui dirige cette droite.
`Dans ce cas, est-ce que la projection dépend du choix de ce vecteur ?`

4. `Pouvez-vous démontrer que cette application de projection est linéaire ?`

♣ Existe-t-il des projections non orthogonales ? Pourquoi ne pas dire simplement projection ?

Exposé 30 - Le cercle. Positions relatives d'une droite et d'un cercle, de deux cercles. Point de ve géométrique et point de vue analytique. Lien entre les deux points de vue.

1. Le candidat parle de deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$' de rayons R et R' tels que $0 < R' < R$. Il note O et O' les deux centres. Le candidat traite quatre cas : cercles sécants en deux points, cercles tangents à l'extérieur, cercles disjoints (selon que l'un est à l'intèrieur de l'autre ou pas) selon la position de la distance entre les deux centres OO' par rapport à $R - R'$ et $R + R'$.
`Est-ce que tous les cas possibles sont bien là ?`

2. `Vous avez traité les cas où` $0 < R < R'$. `Et si` $R = R'$ `?`

3. `Est-ce que vous pouvez démontrer ces résultats énoncés ?`

4. Le candidat précise les positions possibles d'une droite et d'un cercle en fonction du rayon R du cercle et de la distance d du centre du cercle à la droite.
`Pouvez-vous donner une démonstration du résultat dans le cas où` $d < R$ `?`

Questions posées à un autre candidat :

1. `Quel repère utilisez-vous dans l'exposé ?`

2. `Démontrer précisément la proposition menant à l'équation cartésienne d'un cercle.`

3. `Reprenons les positions relatives de deux cercles. Quel est le lien avec l'inégalité triangulaire ?`

5. L'exposé comprend une partie intitulée "Point de vue analytique". Il y est énoncé qu'un point M appartient aux deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ si et seulement si ses coordonnées x et y vérifient les équations des deux cercles qui sont rappelées. L'étude des configurations possibles s'appuie sur l'étude de ces équations.
`Un argument simple permet-il de borner le nombre de solutions de l'intersection des deux cercles ?`
...
`Comment déterminer ces intersections en pratique ?`
Par substitution, on peut exprimer y en fonction de x...

`Et quel genre d'équation obtient-on ?`

Et voici les souvenirs d'un candidat 2007 :

1. `Pouvez-vous nous donner les prérequis pour votre exposé ?`

2. Le candidat se rappelle qu'une preuve ayant été saboté selon ses termes pour finir l'exposé dans les temps, on lui demande :
`Pouvez-vous reprendre cette preuve ?`

3. `L'intersection de la droite d'équation` $y = 3x - 7$ `et du cercle d'équation` $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 39 = 0$ `est-elle vide ?`

Exposé 31 - Théorème de l'angle inscrit. Cocyclicité. Applications.

La première partie de l'exposé est intitulée "Théorème de l'angle inscrit". On note $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, A et B deux points de $\mathcal{C}$. On note $\mathcal{T}_A$ la tangente à $\mathcal{C}$ en A.

Le premier théorème énoncé est le suivant :
Pour tout point M de $\mathcal{C}$ distinct de A et B et tout point T de $\mathcal{T}_A$ distinct de A, on a :

$$1)\ \ (\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\vec{MA}, \vec{MB}) \quad (2\pi) \text{ et}$$

$$2)\ \ (\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\vec{AT}, \vec{AB}) \quad (2\pi)\ .$$

1. `Quel est le nom de l'angle` $(\vec{OA}, \vec{OB})$ `?`

2. `Vous avez énoncé un théorème et son corollaire. Lequel est celui de l'angle inscrit ?`

La deuxième partie de l'exposé traite du lieu des points $\Gamma_\pi = \{M \in \mathcal{P} \mid (\vec{MA}, \vec{MB}) = \alpha\ \ (\pi)\ \}$.
La première proposition de cette partie est la suivante :
1) Si $\alpha = 0\ (\pi)$, alors $\Gamma_\pi = AB \setminus \{A, B\}$.
2) Si $\alpha \neq 0$, alors on construit T tel que $(\vec{AT}, \vec{AB}) = \alpha \quad (\pi)$. On a Γ_π qui est le cercle pasant par A et B admettant AT comme tangente en A et privé des points A et B.

3. `Vous dites dans l'énoncé : on construit le point` T `tel que` $(\vec{AT}, \vec{AB}) = \alpha \quad (\pi)$.
`Comment le construire ?`
Je ne vois pas.
`Est-ce qu'on peut faire un dessin ?`
Le candidat y arrive.
`Alors comment construire` M `maintenant ?`

4. `Vous utilisez le fait que deux cercles qui ont deux points communs et une tangente commune sont les mêmes. Expliquez.`

5. La dernière application de l'exposé est : si $\mathcal{C}$ est un cercle de diamètre AB, alors l'ensemble $\{M \in \mathcal{P} \mid (\vec{AM}, \vec{BM}) = \frac{\pi}{2}\ \ (\pi)\ \}$ est $\mathcal{C} \setminus \{A, B\}$.
`Pouvez-vous démontrer cette dernière application ?`

6. `On dit "intersecte" ou "intercepte" le même arc ?`

Exposé 33 - Relations métriques et trigonométriques dans un triangle rectangle. Applications.

Le candidat annonce que son exposé est situé à un niveau Première S.

1. Le candidat a donné des exercices d'aplication dont il ne fait qu'esquisser la solution.
`Pouvez-vous reprendre cet exercice d'application ?`

2. Pour montrer que dans un triangle non plat ABC on a l'égalité : $\frac{BC}{\sin(\hat{A})} = \frac{AC}{\sin(\hat{B})} = \frac{AB}{\sin(\hat{C})}$, le candidat considère la hauteur issue de A. Il dessine un triangle dont les trois angles sont aigus puis écrit $\sin(\hat{B}) = \frac{AH}{AB}$.

`Dans votre démonstration de la loi des sinus, vous travaillez sur cette figure...`
`Mais que se passe-t-il si l'angle` $\hat{B}$ `est obtus ? Et s'il est droit ?`

3. `Vous avez utilisé plusieurs fois le produit scalaire dans votre exposé. Quelle définition utilisez-vous ?`
Un produit scalaire est une forme bilinéaire définie positive.
`En première S ?`
Non !
`Vous pouvez rappeler ce qu'est une forme bilinéaire définie positive ?`
Le candidat donne la définition dans le cadre d'un espace vectoriel de dimension finie.
`D'accord, et alors pour la première S ?`
Le produit des vecteurs de coordonnées (x, y) et (x', y') vaut $xx' + yy'$.
`Est-ce vraiment ce que vous utilisez dans l'exposé ?`
J'utilise plutôt $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}|| \cos\big((\vec{u}, \vec{v})\big)$.
`Toujours ?`
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.
`Est-ce que vous pouvez écrire la définition proprement ?`

4. `Est-ce que vous pouvez démontrer le théorème d'Al-Kashi ?`

Voici les questions qui ont été posées à un candidian 2007 **au PLP** sur un dossier portant également sur les relations métriques et trigonométriques dans un triangle.

1. `Pouvez-vous démontrer le théorème d'Al-Kashi ?`

2. `A ce propos, quelles sont les différentes définitions d'un angle que l'on peut rencontrer selon les niveaux ?`
Le candidat répond...
`Et quelles sont alors les conséquences sur les démonstrations à proposer, selon les niveaux ?`

3. `Est-ce que vous pouvez nous expliquer le lien entre les fonctions et le cercle trigonométriques ?`
Je trace le cercle...on peut lire le cosinus de l'angle $(\vec{OI}, \vec{OM})$ en ordonnée.
`Est-ce que vous pouvez nous dessiner cette fonction ?`

4. `Que renvoie la calculatrice si on tape` Arcos(0) `?`
$\frac{\pi}{2}$.
`Et pourquoi ?`

5. Le candidat a donné dans son exposé la formule des sinus: $\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B}} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$.
`Est-ce que vous pouvez compléter cette formule ?`
...
`D'accord, pourquoi ne pas l'avoir rajouté dans l'exposé ?`
Par manque de temps.

6. `Alors, quelle formule utiliser quand on connaît un angle et deux mesures ?`
...
`Ok, et si on connaît deux angles et une mesure ?`
...
`D'accord, alors comment aider les élèves à choisir la bonne formule ?`

7. `Quelle formule choisir quand on connaît les mesures des trois angles et que l'on souhaite déterminer les mesures des côtés ?`

Exposé 34 - Droites remarquables du triangle : mediatrice, mediane, bissectrice, hauteur (dans l'ordre que l'on voudra).

Le candidat termine l'exposé en présentant la droite d'Euler. Il montre comment conjecturer à l'aide de la calculatrice l'alignement de de l'orthocentre, du centre de gravité et du centre du cercle circonscrit .

1. `Est-ce que vous pouvez rallumer la calculatrice et revenir sur la droite d'Euler ?`
Ok...je peux utiliser le testeur de propriétés...
`D'accord. Comment convaincre les élèves ?`
Je trace la droite passant par deux des points remarquables : elle passe par le troisième.
`D'acccord, mais comment convaincre que c'est toujours vrai ?`
Je peux faire bouger les sommets du triangle...
`Ok, alors continuer à faire bouger... Celui-ci par là... pour que le triangle soit équilatéral... Que se passe-t-il ?`

2. `Bon, éteignez le rétroprojecteur.`
Ok...
`Rallumez le s'il-vous-plaît. Peut-on conjecturer autre chose sur la position des points ?`
On peut conjecturer que le centre de gravité se trouve au $\frac{2}{3}$...
`Est-ce qu'on peut faire apparaître ce` $\frac{2}{3}$ `avec la calculatrice ?`
Oui, en introduisant les distances.
`On peut le faire ça ? Montrer juste le menu.`

3. Sur la figure du candidat, les milieux des côtés du triangle ABC sont notés D, E et F.
`Est-ce que vous pouvez démontrer que les trois points sont alignés ?`
Comme on vient de parler de la position des points, on peut essayer d'intoduire une homothétie... mais laquelle...
`Ok, par exemple de centre` G`...`
...
`On va changer les notations : notons` A' `le milieu de` BC, B' `pour le milieu de` AC, `et enfin` C' `le milieu de` AB.
Ok, j'ai compris...
`Pourquoi est-ce que je vous ai fait changer de notation ?`

4. Dans la première partie de son exposé, le candidat rappelle la définition des médiatrices. Il énonce alors : les médiatrices sont concourantes en un point I appelé centre du cercle circonscrit.

`Revenons sur la concourance des médiatrices : quelquechose ne va pas.`
...je ne vois pas...
`Est-ce qu'on décide d'appeler ce point centre du cercle circonsrit ?`
Ah, il faut d'abord dire qu'il existe un cercle circonscrit et qu'ensuite les mediatrices sont concourantes en un point qui est centre de ce cercle.

5. `Comment montrer que les médianes sont concourantes?`

On peut envisager une méthode analytique en introduisant le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ et les équations des médianes.

`Et avec un outil de Première S ?`

Avec les barycentres.

♣ Peut-on le montrer au collège ?

Exposé 38 - Réflexion du plan échangeant deux points donnés ; médiatrices, régionnement associé. Applications au triangle et au cercle (cercle circonscrit, angle inscrit...).

1. Dans le première partie de son exposé intitulée *Réflexions*, le candidat utilise un raisonnement par analyse-synthèse pour démontrer le théorème principal. Il dit ce qui suit.

Faisons d'abord l'analyse du problème. Soient A et B deux points distincts du plan. Si une réflexion s d'axe d vérifie $s(A) = B$ alors le milieu I de $[AB]$ appartient à d, et la droite AB est perpendiculaire à d. La droite d est donc la droite perpendiculaire au segment $[AB]$ passant par son milieu.

`Pourquoi est-ce que la droite` d `passe par le milieu de` $[AB]$ `?`
...
`Pouvez-vous l'écrire proprement ?`

2. `Pouvez-vous démontrer le théorème de l'angle inscrit ?`

3. `Quelle est la définition d'un arc capable ?`

4. Le candidat a expliqué dans son exposé la construction de la médiatrice d'un segment à la règle et au compas. Comme application, il donne la construction du symétrique d'un point M quelconque par rapport à la médiatrice d de $[AB]$, à la règle seule : A, B et d étant donnés.
`Est-ce qu'on peut reprendre votre application de la médiatrice ?`

5. La notion de régionnement du plan occupe un paragraphe de la première partie de l'exposé du candidat : définiton, caractérisation métrique et par le produit scalaire.

`Est-ce que vous pouvez nous expliquer autrement ce régionnement, le décrire autrement ?`
...
`Par exemple, si une rivière traverse une étendue ?`

Exposé 39 - Réflexions du plan échangeant deux droites données, bissectrices. Applications au triangle et au cercle (cercle inscrit, tangentes à un cercle...).

1. Dans la leçon, la candidate démontre que les trois bissectrices d'un triangle ABC se coupent en un point G. Elle écrit ensuite :
Définition : G est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.
`Cette ligne là, est-ce vraiment une définition ?`

2. `Que pensez-vous du choix de la lettre` G `pour désigner ce point ?`

3. Le dessin qui illustre cette proposition est le suivant :

Desssin a reprendre

`Etes-vous sûre de votre figure ?`

4. Un triangle OAB isocèle de sommet O est dessiné. On note C le pied de la hauteur issue de O.
`Vous dites que` OAC `et` OBC `sont semblables. Mais ici ?`
...
`Est-ce qu'on n'a pas plusieurs classes d'équivalences sur les triangles ?`
Ils sont homothétiques.
`Qu'est-ce que c'est qu'une homothétie ?`
Isométriques, ils sont isométriques.
`Ok, revenons aux homothéties. Est-ce vraiment à cette classe de fonctions que vous pensiez ?`

5. `Cherchons les réflexions qui échangent des demi-droites de même origine.`
La candidate trace deux demi-droites d'origines distinctes.

reprendre rajouter un dessin

`Donnez des noms peut-être.`
La candidate rajoute O_1 et O_2, puis cherche.
`Prolongez les droites peut être.`
La candidate le fait, et rajoute les bissectrices Δ et Δ'. Elle dit que ce sont les deux réflexions d'axe Δ et Δ'.
`Est-ce que ça marche toujours ?`
Non, pas forcément.
`Pourquoi on vous a fait tracer deux demi-droites ? Qu'est-ce qui se passe si on regarde la symétrie d'axe` Δ `?`

6. `Comment faire découvrir la symétrie en classe de sixième ? Avec des gestes ?`

7. `Comment construire la bissectrice au collège ?`
Au compas.
`Vous pouvez nous montrer ?`
La candidate trace deux droites se coupant en O. Elle place deux points A et B sur chacune des droites à égale distance de O et à l'aide du compas. Enfin, conservant l'écart du compas, elle commence à tracer les cerlces centrès en A et B. Elle s'arrête, modifie l'écart, et recommence. Avec les points d'intersection des deux cercles, elle trace la bissectrice.
`Pourquoi avoir changé l'écart du compas lors de la construction ?`
Sinon les deux cercles étaient tangents.
`A quelle condition deux cercles sont-ils tangents ?`
...
`Bon, et est-ce que ça change la construction de changer l'écart ?`
Non.
`Pourquoi ?`

8 `Peut-on définir la bissectrice en terme d'angles ?`

Un deuxième candidat passe en 2007. Considérant un triangle ABC il parle des cercles tangents aux droites AB, AC et BC.

1. `Comment s'appellent ces cercles ?`
♣ Combien y en a-t-il ?

2. `Reprenons la première partie de votre exposé. Pourquoi les réflexions que vous considérez échangent bien les deux droites ?`

3. Dans cette première partie, le candidat avait considéré deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en O. Il choisit A sur $\mathcal{D}$ puis A' et A'' sur $\mathcal{D}'$ tels que $OA = OA' = OA''$. puis considère une réflexion s changeant $\mathcal{D}$ en $\mathcal{D}'$. On a alors $s(A) \in \{A', A''\}$, et il n'y a alors que deux réflexions possibles, de centre O.
`Pourquoi` O `est-il point fixe de la réflexion considérée ?`
...
`Pourquoi n'y a-t-il que deux réflexions possible ?`

4. Le candidat affirme que les médiatrices de $[AA']$ et de $[AA"]$ échangent bien $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ car elles fixent O et échangent A en A' ou en A''.
`Et si on prend un point` B `de` $\mathcal{D}$ `différent de` A`, est-on sûr que l'image de` B `par l'une de ses réflexions sera sur` $\mathcal{D}'$`?`
Oui, car l'image d'une droite est une droite.

5. `Pourquoi une réflexion transforme-t-elle une droite en une droite ?`
♣ Peut-on donner des réponses à différents niveaux ?

6. `Pouvez-vous démontrer que pour tout point` M `appartenant aux bissectrices privées du point d'intersection` O`, on a l'égalité` $(\vec{u}, \vec{OM}) = (\vec{OM}, \vec{v}) \quad (\pi)$ `où` $\vec{u}$ `et` $\vec{v}$ `sont des vecteurs directeurs des droites considérées ?`

Exposé 42 - Groupe des isométries du plan : décomposition d'une isométrie en produit de réflexions, groupe des déplacements classification des isométries à partir de l'ensemble des points invariants.

1. Dans l'exposé, les ensembles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ désignent les points fixes de trois applications affines. Le candidat a écrit l'égalité ensembliste $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{C}$.
`Est-ce qu'on peut reprendre cette égalité...`
Oui ?
`Le plan, la droite, les singletons, l'ensemble vide... qu'est-ce que c'est ?`

2. `Qu'est-ce qu'on peut dire sur les isométries et les angles de droites ?`

3. `Qu'est-ce qu'on peut dire d'une application affine injective en dimension finie ?`
Elle est bijective.
`Pourquoi ?`

4. `Est-ce qu'on peut montrer que toute application qui conserve les distances est affine ?`

Voici des questions posées à un candidat 2008 :

1. Le candidat a déclaré qu'étant donné une isométrie, on pouvait trouver deux points invariants A et B, et qu'alors la droite AB était invariante.
`Est-ce que vous pouvez le démontrer ?`

2. `Vous avez dit que les isométries conservent le parallélisme, l'alignement, les barycentres. Quelle est la propriété la plus forte ?`

3. `Est-ce que vous pouvez nous donner des fonctions qui conservent le barycentre ?`

4. `Pouvez-vous montrer que les isométries sont injectives ?`

5. `Comment démontrez-vous que l'image d'une droite par une isométrie est une droite ?`

6. Vous avez dit que si une isométrie f possède une droite invariante, alors f est une réflexion ?
Oui.
Pouvez-vous le démontrer ?

Exposé 44 - Recherche des isométries du plan conservant un polygone régulier ; exemples (triangle équilatéral, carré, hexagone, octogone...).

1. `Pouvez-vous nous donner la définition d'une isométrie ?`

2. Le candidat a tracé un rectangle centré en O, et dont les supports des côtés sont parallèlles aux axes du repère. Il a noté Δ_1 etΔ_2 les deux diagonales.
`Quelles sont les isométries qui conservent le rectangle ?`
Il y a l'identité, S_O, la symétrie centrale de centre O, puis S_{Δ_1} et S_{Δ_2} les symétries d'axes les deux diagonales Δ_1 et Δ_2.
`Montrer que` S_O `conserve le rectangle.`

3. `Est-ce que vous pouvez rappeler la définition de la symétrie d'axe` Δ `?`
...
`Pouvez-vous donner une définition accessible en` 6^{eme} `?`

4. `Pouvez-vous montrer que les quatre isométries citées précédemment sont les seules isométries conservant le rectangle ?`

5. `Pouvez-vous définir le point` O `?`
C'est le point d'intersection des diagonales.
...
C'est le point d'intersection des diagonales Δ_1 et Δ_2.
`Une autre définition s'il-vous-plaît ?`

6. `Comment pouvez justifier que si` s `est une isométrie laissant invariant le rectangle, alors` $s(O) = O$ `?`

Exposé 45 - Réflexion de l'espace échangeant deux points donnés ; plan médiateur, régionnement associé. Etude des isométries de l'espace ayant une droite de points invariants.

Le candidat avoue n'avoir pas préparé l'exposé qu'il choisit.

1. Lors de son exposé, le candidat a dit : l'espace est partagé en deux demi-espaces lorsqu'il est coupé par un plan. Si on considere un point M de l'espace n'appartenant pas au plan, et M' son image par la réflexion définie par ce plan, alors le demi espace possédant ce point est caractérisé par l'ensemble des point K tels que $MK < M'K$. L'autre demi-espace est caractérisé par l'ensemble des point K tels que $MK > M'K$. Le plan est caractérisé par l'ensemble des point K tels que $MK = M'K$.

`Comment définissez-vous un demi-espace ?`
Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé privé d'un hyperplan en dimension finie a deux composantes connexes : ce sont les deux demi-espaces.
`C'est trop compliqué. Est-ce qu'on peut faire autre chose ?`
...
`Plus simplement, comment définir un demi-espace pour des éleves du secondaire ?`
La caractérisation ci-dessus prise en temps que définition donne une bonne définition de deux demi-espaces.

2. `Alors si vous prenez cette définition, quelles propriétés énoncez-vous ?`
Un point et son image ne sont pas dans le même demi-espace.

3. `Trouvez une autre propriété.`
...
`Si on prend deux points dans le même demi-espace, le segment les liant reste dans celui-ci : montrez le.`
Considérons un point du segment comme barycentre des deux points...

4. Une partie de l'exposé traite des réflexions, une autre des rotations.
`Pouvez-vous faire un lien entre ces deux parties ?`
...
`Vous avez affirmé qu'une isométrie ayant exactement une droite pour points fixe est une rotation ayant pour axe cette droite. Voyez-vous un lien ?`

Exposé 50 - Définitions de l'hyperbole, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions.

Dans son plan, la candidate énonce que la directrice est un axe de symétrie, que l'hyperbole admet un unique sommet. Elle place son repère centré sur son sommet avant de passer à une définition analytique. Il n'y a pas de figure.

1. `Quelle est l'allure d'une hyperbole ?`
La candidate dessine une seule composante connexe.
`Votre dessin est-il en accord avec les symétries trouvées ?`
La candidate dessine l'autre composante connexe.
`Votre dessin est-il en accord avec l'unique sommet que vous avez déterminé ?`

2. `Reprenons vos symétries. Peut-on, avec votre définition analytique, montrer que certains axes particuliers sont axes de symétrie ?`
...
`Prenons l'axe` Ox `par exemple.`
...la candidate montre que Ox et Oy sont des axes de symétrie de l'hyperbole.
`Comment représenter l'hyperbole à la calculatrice ?`
Je ne sais pas.
`En représentant deux fonctions par exemple.`
La candidate exprime deux fonctions.
`A partir de là, pourriez-vous donner une allure de la courbe associée ?`
On étudie les deux fonctions.
`Vraiment ?`
On peut en étudier une et en déduire la courbe de l'autre.
`Comment ?`
En utilisant une symétrie.
`Et même mieux ?`
On va réduire l'étude en utilisant les deux symétries.

3. `Au lycée on étudie la fonction inverse. Quelle est la nature de sa courbe représentative ?`
...
C'est une hyperbole, non ?
Oui.
Quel est le rapport avec l'hyperbole telle que vous nous l'avez définie ?

Exposé 53 - Suites convergentes. Opérations algébriques, composition par une application continue. limites et relations d'ordre.

1. Pendant l'exposé, le candidat choisit de démontrer précisément que le produit de deux suites (u_n) et (v_n) convergeant vers l et l' est une suite convergeant vers ll'. Pour tout $\epsilon > 0$, il montre qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, on ait :

$$|u_n v_n - ll'| \leq (M + |l'|)\epsilon \tag{1}$$

où M est une borne de (v_n) (dont il a montré l'existence au cours de l'exposé). Il arrête ici sa démonstration. A la fin de son exposé, on lui demande :
`Au fait, comment conclure à partir de (1) à la limite ?`
Le candidat explique qu'il faut choisir ϵ' convenable.
`Ecrivez-le complètement.`

2. Dans l'exposé, le candidat introduit l' exemple de la suite $w_n = (-1)^n$ non convergente.
`La suite` w_n `peut servir de contre-exemple : dans quelle situation ?`

3. `Vous avez énoncé le théorème de composition des limites par une fonction continue. Peut-on s'en servir pour démontrer ou redémontrer un autre résultat de la leçon ?`
Le candidat propose le passage à l'inverse et la multiplication par un scalaire.

4. `Vous avez dit qu'une suite de réels croissante et majorée converge dans` $\mathbb{R}$. `Et pour les rationnels ?`
Une suite croissante de rationnels converge également dans $\mathbb{R}$.
`Oui, mais dans` $\mathbb{Q}$ `?`
Non.
`Avez-vous un exemple ?`
Le candidat cite d'abord $\sqrt{2}$, puis préfère parler de $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = e$.
♣ Savez-vous le démontrer ? Savez-vous le démontrer à une classe de Terminale S ?

5. `Vous avez dit qu'une suite convergente n'admettait qu'une limite. Vous pouvez le démontrer ?`
Le candidat propose oralement deux méthodes : une par l'absurde, et une en montrant que la différence des deux limites est plus petite que tout réel positif.
`Ecrivez en une.`
Soit $\epsilon > 0$. On peut déduire de la convergence de (u_n) vers l et l' l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$ on ait $|u_n - l| \leq \epsilon$ et $|u_n - l'| \leq \epsilon$. Puis...
`Pourquoi ne considère-t-on qu'un seul entier` N `et pas deux, un pour chaque limite ?`

6. Le candidat a en fait placé l'exposé dans le cadre des suites à valeurs dans un corps $\mathbb{K}$.
`Pourquoi ce choix de` $\mathbb{K}$ `?`
Il faut être dans un corps pour que les opérations algébriques discutées dans la leçon soient définies.
`C'est vrai. Mais peut-on toujours parler de limite ?`
...
`Regardez votre définition de limite !`
On dit que (u_n) converge vers $l \in \mathbb{K}$ si $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \big(n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon\big)$...
`Il y a deux barres dans votre définition...` Le jury joint le geste à la parole.
Les valeurs absolues ! Oui, il faut prendre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
`Est-ce qu'on ne pourrait pas avoir un cadre plus large pour définir quand même la convergence d'une suite ?`
Toute suite de Cauchy converge ?
`Qu'est-ce qu'on pourrait mettre à la place du module ?`

7. `En parlant de suite de Cauchy, quelle en est la définition ?`
♣ Comment montrer qu'une suite convergente est de Cauchy ?

Exposé 54 - Suites divergentes. Cas des suites admettant une limite infinie: comparaison, opérations algébriques, composition par une application.

1. Le théorème de composition par une application donné dans l'exposé est le suivant :

Théorème : Soit (u_n) une suite divergente vers $+\infty$. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que f admette pour limite l en $+\infty$. Alors la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge vers l.

`Est-ce qu'on ne pourrait pas énoncer un autre théorème de composition qui rentrerait dans le cadre de l'exposé ?`

2. `Est-ce qu'on peut donner des suites de référence ?`
Les suites arithmétiques et géométriques.
`Est-ce que vous pouvez préciser leur comportement en fonction des paramètres ?`
Le candidat précise.
`Et puis d'autres suites ?`
Il y a les suites (n^a), (a^n), $(\ln(n))$,...
`Est-ce que vous pouvez énoncer et démontrer les résultats dans le cas de la suite` (a^n) `?`

3. `Etudions la suite définie par son premier terme` $u_1 \geq 0$ `et la relation de récurrence` $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$.
Elle est croissante...donc admet soit une limite finie, soit diverge. Elle ne peut avoir de limite finie, car l'équation $l = l + e^l$ n'a pas de limite.
`Oui, pourquoi la limite` l `doit vérifier cette équation ? Vous pouvez justifier ?`

Voici les questions posées à un autre candidat :

1. `Vous écrivez que si` (u_n) `tend vers l'infini et si` (v_n) `converge vers un réel` l, `aors` $\frac{v_n}{u_n}$ `tend vers` 0 `?`
Oui.
`Si la suite` (u_n) `diverge vers` $+\infty$`, ses termes sont-ils tous non nuls ?`
Non, mais à partir d'un certain rang c'est le cas.
`Est-ce que vous pouvez le démontrer précisément ?`

2. `Est-ce qu'il existe des conditions suffisantes simples pour avoir la suite` (u_n) `qui tend vers` $+\infty$ `?`
Si la suite (u_n) est croissante et non majorée.
`D'accord, et la réciproque ?`
...
`Est-ce qu'une suite non majorée tend vers` $+\infty$ `?`
Non.
`Est-ce que vous avez un contre-exemple ?`

3. `Supposons par exemple la suite` (u_n) `croissante. Que peut-on dire ?`
Elle tend vers $+\infty$ si et seulement si elle est non majorée.
`Est-ce que vous pouvez le montrer ?`

4. `Comment comparer deux suites qui tendent vers` $+\infty$ `?`

5. `Soit` f `une fonction de` $\mathbb{R}$ `dans` $\mathbb{R}$ `monotone, et une suite` (u_n) `de limite` $+\infty$`. Que peut-on dire de la suite` $(f(u_n))$ `?`

♣ Comment situer dans un cours un résultat de composition pour préciser le comportement de $f(u_n)$ et les résultats concernant les limites de fonctions ?

♣ Qu'est-il dit dans les programmes des lycées concernant la divergence ? Connaissez-vous une progression à ce propos entre les programmes de Première et de Terminale S ?

♣ Savez-vous retrouver rapidement les rèsultats de divergence des suites $(e^{in\theta})_{n\geq 0}$?

Entre en scène un candidat 2008 :

1. Le candidat a donné des définitions et énoncé des théorèmes, mais n'a pas proposé d'exemples de suite.
`On a vu peu d'exemples de suites divergentes !`

2. Le dernier des théorèmes proposés par le candidat est énoncé ainsi : *Théorème :* Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim f(u_n) = l$.
`Votre dernier théorème est mal énoncé, mal structuré.`
...
`Qui sont` f `et` (u_n) `?`
Le candidat précise.
`Bon, alors est-ce qu'il y a une réciproque ?`

3. `Vous allez nous rappeler ce qu'est une suite géométrique, et quand elle diverge.`
Il écrit $u_n = k^n.u_0$.
`Supposons` $u_0 = 1$. `Quand est-ce que cette suite diverge ?`
Si $|k| < 1$ elle converge vers 0. Si $|k| = 1$, alors elle est constante égale à 1. Et si $|k| > 1$, elle diverge.
`Si` $|k| = 1$ `elle converge ?`
Ah non, si $k = -1$, elle diverge.
`Ok, et si` $k \in \mathbb{C}$ `?`
Si $|k| < 1$ elle converge vers 0, si $|k| > 1$, elle diverge et si $|k| = 1$, alors il n'y a pas de limite.

4. `Pouvez-vous étudier la convergence de la suite de terme général` $\frac{2^n}{n^2}$ `?`
On a $2^n = e^{n\ln(2)}$...
`Et sans le logarithme ?`
...
`Pouvez-vous étudier` $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ `?`
La limite est 2 : il y a donc divergence.
`Pourquoi ?`
Avec d'Alembert.
`Et sans utiliser ce critère ?`
...
`Est-ce qu'on ne peut pas se ramener à une suite géométrique ? Tout est dans votre cours !`

Exposé 56 - Etude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et une condition initiale. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation de la calculatrice.

1. Un théorème de la leçon est le suivant :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une fonction croissante (respectivement décroissante). Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par son premier terme $u_1 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante (respectivement décroissante).

`Est-ce qu'on peut reprendre ce théorème ?`
Oui ?
`Qu'est-ce qui se passe par exemple avec la fonction` $x \mapsto x^2$ `et` $u_1 = \frac{1}{2}$ `?`
Ca ne marche pas...
`Alors comment corriger ?`

2. Un des exercices d'application consiste à étudier la suite définie par son premier terme $u_1 \in [0, 5]$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{5}{4+u_n}$. La candidate a expliqué que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) étaient strictement monotones, l'une strictement croissante et l'autre strictement décroissante. Elles convergent toutes les deux vers 1, d'où la suite (u_n) converge vers 1.
`Est-ce le seul comportement possible pour la suite` (u_n) `?`
...
`Et si on prend` $u_1 = 1$ `?`

3. `Considérons la suite définie par son premier terme` $u_0 = 2$ `et la relation de récurrence` $u_{n+1} = 3u_n + 2$`.`
La suite (u_n) est croissante, et la seule limite possible est $+\infty$.
`Oui, comment s'appelle une telle suite ?`
Une suite aritmético-géométrique.
`Peut-on exprimer` u_n `en fonction de` n `?`

4. `Considérons cette fois une suite définie par ses deux premiers termes` u_1, u_2, `et par la relation de récurrence` $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$. `Pouvez-vous donner l'expression du terme général en fonction de` n `?`
Il faut considérer l'équation caractéristique... Comme la candidate bloque, on lui demande :
`Quelle est la nature de l'ensemble des solutions ?`

♣ A quoi peuvent servir de telles suite ?
♣ Connaissez vous de telles suites *célèbres* ?

Et voici les souvenirs d'un candidat concernant un autre candidat 2008 :

1. Le candidat a expliqué au début d el'exposé qu'il considérait des fonctions $f : I \to I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, auxquelles il associait des suites (u_n) définies par leur premier terme $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
`Quelle hypothèse faut-il prendre sur` I `pour être sûr que la limite de` (u_n) `soit dans` I `?`

2. Le candidat a proposé comme exemple la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $x \mapsto \frac{x^2+8}{6}$.
`Est-ce que vous pouvez tracer la courbe représentative de la fonction ?`
Le candidat trace...
`Pouvez-vous préciser la tangente au point d'abscisse` 0 `?`

3. `Est-ce que vous pouvez donner des applications des suites récurrentes ?`
...
`Dans quel domaine des maths peuvent-elles être utiles ?`

4. `Pouvez-vous énoncer le théorème du point fixe ?`

Exposé 58 - Limite finie d'une fonction à valeurs réelles en un point a de $\mathbb{R}$. Opérations algébriques sur les limites. Conitnuité d'une fonction en un point. Exemples.

1. Le candidat parle de fonctions définies sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$.
`Vous avez traité le cas de la limite de la fonction` f `en un point` $a \in D$. `Pourtant dans le cas d'une fonction définie sur` $]0,1]$ `on s'intéresse souvent à la limite de` f `en` 0 `?`
On peut étendre la définition au cas où a est dans l'adhérence de D.
`Ok. Parleriez-vous d'adhérence en classe de Terminale ?`
♣ Que dit-on en Terminale ?

2. Dans l'exposé proposé, une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in D$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall x \in D,\ (|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)|) < \epsilon.$$

`Avec votre définition, la fonction` $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ `qui à` n `associe` n^2 `est-elle continue ?`

3. L'exposé comprend une présentation du problème, les définitions de limite et de continuité, ainsi que les théorèmes concernant les opérations algébriques. Il n'y a pas d'exemples.
`Le dernier mot de l'intitulé est exemples.`
...
`Bon, ben, il faut en donner !`
Par exemple, les fonctions constantes, la fonction x, les fonctions affines...
`Alors avec votre théorème sur le produit des fonctions continues ?`
Les fonctions polynômes sont continues.
`Et en utilisant le théorème sur le passage à l'inverse ?`
Les fractions rationelles sont continues sur leur ensemble de définition.
`Est-ce que vous en connaissez d'autres ?`
La fonction *sinus*.
`Pouquoi la fonction sinus est-elle continue ?`
Le candidat explique la continuité en 0.
`Et ailleurs ?`
On peut utiliser $\sin(x) - \sin(a)$ ...

4. `Pouvez-vous démontrer géométriquement que` $\frac{\sin(x)}{x} \to_{x\to 0} 1$?

Exposé 59 - Limite à l'infini d'une fonctions à valeurs réelles. Branches infinies de la courbe représentative d'une fonction. Exemples. L'exposé pourra être illsutré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation de la calculatrice.

1. `Calculer la limite de` $(1+\frac{1}{x})^x$ `en` $+\infty$.

2. Le candidat a donné comme exemple dans l'exposé la fonction $x\sin(x)$ qui n'admet pas de branche infinie. Il a expliqué que c'est le cas car $\sin(x)$ n'a pas de limite.
`Est-ce que vous pouvez en donner une preuve ?`
Je ne vois pas tout de suite...
`Essayer d'utiliser les suites.`

3. `Vous avez utilisé un théorème de composition de la limite d'une suite et d'une fonction en un point. Est-ce que vous pouvez l'énoncer précisément ?`
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit f une fonction continue sur I, et (u_n) est une suite d'éléments de I qui tend vers a. Si f tend vers L quand x tend a, alors la suite $f(u_n)$ converge vers l.
`Est-ce que ce théorème admet une réciproque ?`

4. `On considère la fonction` $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$. `Déterminer l'équation d'une asymptote.`

5. `Soit` f `une fonction de limite` $L > 0$ `en` $+\infty$, `et` g `une fonction qui tend vers` $+\infty$ `en` $+\infty$. `Comment montrer que` fg `tend vers` $+\infty$ `en` $+\infty$ `?`

Un candidat 2007 décrit son oral : il lui reste trois lignes à écrire lorsqu'on lui signale :
`Le temps imparti est écoulé, vous pouvez nous dire ce que vous comptiez faire.`

1. `Dans vos définitions de limite, peut-on changer les inégalités strictes en inégalités larges ?`

2. `La courbe représentative de l'application` $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x+1}\right)$ `admet-elle une asymptote ?`

3. `Pouvez-vous montrer que la limite de la fonction` $\frac{\ln(x)}{x}$ `est nulle en` $+\infty$ `?`

4. `Connaissez-vous une méthode qui sert souvent pour déterminer les asymptotes?`
...
`Par exemple,`
Oui, les développements limités.
`Est-ce qu'on peut reprendre l'exemple avec cette méthode ?`

Et maintenant une candidate 2008 :

1. La candidate propose cette définition de l'asymptote : on dit f admet une asymptote si $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ |\forall x \in [A, +\infty[|f(x)| \geq M.$
`Dans votre définition d'une asymptote, qui est` x `? Est-ce que` $f(x)$ `ets toujours défini ?`
Ah oui, il faut prendre $x \in]A, +\infty[\cap D_f$.
`Mais si un élève vous demande est-ce qu'on peut étudier la limite de` $\sqrt{1-x}$ `en` $+\infty$ `?`
Je lui préciserai que l'on étudie les limites au bornes de l'ensemble de définition.
`Vous dites qu'il y a une asymptote lorsque` $d(O, M(x))$ `tend vers l'infini quand` x `tend vers l'infini, mais alors l'asymptote verticale, qu'est-ce que c'est pour vous?`
Ah oui, il y a un problème dans la définition, il faut rajouter quand x tend vers x_0 où x_0 est dans l'ensemble de définiton ou est l'infini !

2. `Est-ce qu'on peut reprendre votre tableau récapitulatif`

Exposé 60 - Image d'un intervalle par une fonction continue, cas d'un segment. Cas d'une fonction continue strictement monotone.

Pour situer, ces questions arrivent après un exposé très clair dont la démonstration centrale était celle du théorème des valeurs intermédiaires. La démonstration reposait sur la construction par dichotomie de deux suites adjacentes.

1. `Pouvez-vous donner des contre-exemples dans des cas où les hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires ne sont pas vérifiées ?`
Si on enlève la continuité, la fonction partie entière donne un contre-exemple.
`A ce propos, connaissez-vous une classe de fonctions, non nécessairement continues, mais qui vérifient les conclusions du théorème des valeurs intermédiaires ?`
Les fonctions dérivables, d'après le théorème de Darboux.
`Pouvez-vous le démontrer ce théorème ?`
... Je ne me souviens plus.
`Peut-être avec un dessin ?`

♣ Si A est une partie de $\mathbb{R}$, une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ continue vérifie-t-elle la propriété des valeurs intermédiaires ?

2. `Changeons-nous les idées avec un exercice destiné à une classe de Terminale. On considère un carré de sommets` $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ `et` $(0,1)$.
Le candidat prend l'initiative de dessiner.
`On considère une fonction dont l'ensemble de définition est` $[0,1]$ `et dont le graphe reste dans le carré. Est-ce que ce graphe coupe la première bissectrice ?`
Oui, je considère la fonction $\phi(x) = f(x) - x$...
`D'accord, mais comment l'introduisez-vous à des élèves ?`

3. `Vous avez dans l'exposé donné des exemples où le type de l'intervalle n'était pas conservé. Sous-quelle condition le type de l'intervalle est-il conservé ?`

5. `On imagine le cas où la fonction` $x \mapsto \ln(x)$ `a été introduite. Comment montrer graphiquement que sa réciproque est sa propre dérivée ?`

Exposé 61 - Dérivée en un point, meilleure approximation affine, interprétation géométrique. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

1. La définition suivante de la dérivabilité est donnée dans l'exposé.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et a un élément de Ω. Soit une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en a si et seulement si il existe V un vosinage de a dans Ω, $d \in \mathbb{R}$ et une fonction $\phi : V \to \mathbb{R}$ qui tende vers 0 en a et telle que $\forall x \in V, \quad f(x) = f(a) + d(x-a) + (x-a)\phi(x)$.
`Vous avez annoncé que la dérivée de la fonction` x^n `était la fonction` nx^{n-1}`. Comment le démontrer ?`
On calcule $\frac{(x+a)^n - a^n}{x} = ...$ puis on fait tendre...
`D'accord. Avec votre définition, était-ce possible ? Peu adapté ?`

2. `Vous venez d'annoncer que` f `est dérivable en` a `si et seulement si la fonction` $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ `admet une limite quand` x `tend vers` a`. Vous pouvez le démontrer ?`

3. `Vous n'avez pas parlé de la dérivée de` $\frac{f}{g}$ `mais des autres opérations algébriques. Pourquoi ?`

4. `On cherche une fonction qui n'est pas dérivable en un point, mais qui y admette une tangente.`
La fonction racine carrée en 0, elle a une tangente verticale en 0.
`Comment le justifier ?`
Le taux d'accroissement tend vers $+\infty$ en 0.
`Et alors, pourquoi quand le taux d'accrosisement tends vers` $+\infty$ `la tangente est-elle verticale ?`
...
`Quelle est la définition de la tangente à une courbe en un point ?`
...
`Par exemple, quelle est la définition de la tangente à un arc paramétré ?`
Oui, on prend $\big(x(t), y(t)\big)$, puis $\big(x'(t_{t_0}), y'(t_{t_0})\big)$.
`Et alors avec` $(t, \sqrt{t})$ `?`

5. `Dans votre exposé, vous considérez des fonctions définies sur des ouverts` Ω`. C'est un choix, comment le motiver ?`
...
`Par exemple pour des fonctions définies sur des intervalles` $[0,1]$`, vous ne pouvez plus parler de dérivabilité en` 0`.`
...
`Si on prend` $]0,1[\cup\{2\}$ `?`

Le problème, c'est que 2 n'est pas point d'accumulation.
`Vous pouvez définir un point d'accumulation ?`

6. `Justifier la formule de la dérivée d'un produit de fonctions.`

Exposé 62 - Fonctions dérivées. Opérations algébriques. Dérivée d'une fonction composée. Exemples.

1. `Démontrer précisément que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en` 0.

2. Le candidat a donné dans l'exposé un tableau des dérivées classiques :

f	1	x	x^n	$\ln(x)$	$\tan(x)$
f'	0	1	nx^{n-1}	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

`Est-ce qu'il ne manque rien dans ce tableau des dérivées ?`
L'ensemble de dérivabilité.
`Par exemple ?`
Pour $\ln(x)$, il faut être sur $\mathbb{R}_+^*$.
`D'accord, et pour la fonction tangente ?`
On enlève les réels de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec k dans $\mathbb{Z}$.
`Est-ce qu'il y a des fonctions pour lesquelles l'ensemble de dérivabilité n'est pas l'ensemble de définition ?`

3. `Quel est l'ensemble de dérivabilité de la fonction racine ?`
C'est $\mathbb{R}_+^*$.
`Pourquoi ? Quel est le problème en` 0 `?`

4. `Une fonction doit-elle être dérivable en un point pour y admettre une tangente ?`

5. `Pouvez-vous démontrer le théorème de dérivation des fonctions composées ?`
On commence par écrire $\frac{f\big(g(x)\big)-f\big(g(a)\big)}{g(x)-g(a)}.\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$, puis...
`Comment sait-on que` $g(x) \neq g(a)$ `?`
...
`Quelle propriété n'a pas` g `a priori ?`
La stricte croissance.
`Que rajouter pour que toute cette étude ait un sens ?`

Et bien par exemple si $g'(a) \neq 0$, on $g(x) \neq g(a)$ sur un voisinage de a.
`Est-ce que vous pouvez l'écrire précisément ?`

6. `Tout à l'heure, vous avez écrit` $\left(\tan(x)\right)'$`, et vous avez hésité. Vous aviez l'air gêné. Pourquoi ?`
Oui, car $\tan(x)$ est une constante.
`Comment l'écrire alors ?`

7. `Peut-on regarder la dérivabilité de la fonction` $e^{-\tan(x)}$ `en` $\frac{\pi}{2}$ `?`
Je peux essayer de prendre le logarithme.
`Oooohhh...ce n'est peut être pas la peine. Connaissez-vous un autre moyen de calculer la dérivée ?`
...
`Allez !` (encourageant)
Avec un développement limité.

Une candidate 2007 entre dans l'arène :

1. Dans son exposé, elle a donné comme application le calcul de $\sum_{p=0}^{n} p^2\binom{n}{p}$.
`Pouvez-vous nous expliquer ce calcul ?`

2. `Quand utilise-t-on ce calcul, dans quel domaine ?`
En dénombrement, probabilités.
`Pouvez-vous être plus précise ?`
Pour des calculs d'espérance et de variance.
`Pouvez-vous être encore plus précise ?`

3. `Pouvez-vous démontrer le théorème de votre exposé qui dit que le produit de deux fonctions dérivables est dérivable ?`

4. `Pouvez vous démontrer la formule de Leibnitz citée dans votre exposé ?`
La candidate entame une récurrence. Elle montre l'hérédité...on la coupe :
`De quoi avez-vous besoin ?`

De la formule $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$.
`A quoi faut-il faire attention également ?`
Au rang initial.

5. `Vous nous avez parlé de la dérivée d'ordre` n `du produit` fg. `Pourquoi pas de la dérivée d'ordre` n `de la composée` $f \circ g$ `? Est-ce que c'est toujours possible ?`

6. `Vous avez considéré des fonctions réelles. Et si on travaille avec des fonctions à valeurs dans` $\mathbb{C}$ `? Qu'est-ce qui change ?`

7. `Pourquoi n'avez vous pas parlé de la dérivée de la fonction réciproque` f^{-1} `? Pouvez-vous nous la donner ?`

Et encore une candidate 2007. :

1. La candidate a présenté sur transparent la proposition :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Une fonction $f\ : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 si et seulement si il existe un réel b et une fonction $E\ :\ I \to \mathbb{R}$ tels que :
1) E ait pour limite 0 en x_0, et E continue en x_0
2) pour tout $x \in I$ on ait $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)b + (x - x_0)E(x)$. Dans ce cas, le nombre b est égale à $f'(x_0)$

`Pouvez-vous nous expliquer votre théorème sur le transparent et nous le montrer ?`
...il n'y a pas besoin de la continuité de E en fait.
`Ok, passons.`

2. La candidate a proposé un tableau des dérivées usuelles :

$f(x)$	u^n	uv	$\frac{u}{v}$
$f'(x)$	$n.u^{n-1}$	$u'v + v'u$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$

`Qu'est-ce que signifie votre tableau ?`

3. `Pouvez-vous démontrer le théorème donnant la dérivée de` $\frac{1}{f}$ `en` x_0 `?`
D'accord : je suppose que f ne s'annule pas sur un intervalle I contenant x_0.
`Ne peut-on avoir` $f(x_0) \neq 0$ `et` f `qui s'annule en un autre point, où qui soit nulle sur` I `?`
C'est conséquence de la limite.
`Pourquoi parler de limite ?`
On peut avec l'adhérence...
`C'est la continuité !` (dans le souvenir de la candidate, le jury hurle, et elle perd pied).

4. Lors de son exposé, la candidate a énoncé le théorème suivant : si les fonctions réelles $f : I \to J$ et $g : J \to K$ sont dérivables, alors $f \circ g$ est dérivable et $(f \circ g)' = g'.f' \circ g$. Pour le démontrer, le candidat a introduit la fonction taux d'accroissement en $g(x_0)$.
`Est-ce que vous pouvez énoncer à nouveau le théorème de composition ?`
Pardon, il y a une erreur dans les ensembles...
`En effet, est-ce que vous pouvez le corriger ?`
...
`Pouvez-vous nous expliquer à nouveau la démonstration ? A quoi sert cette fonction intermédiaire que vous avez introduite ?`
Elle permet d'avoir le résultat plus rapidement, en évitant de discuter l'annulation au dénominateur...
`Je ne comprends pas...`

Une candidate 2008 se lance à son tour.

1. La candidate a précisé que dans l'exposé, on considérait une fonction $f : D \to \mathbb{R}$.
`Qu'est-ce que c'est que ce` D `?`
...
`Est-ce qu'on peut considérer la dérivée en un point isolé ?`

2. `Qu'est ce que le nombre dérivé ?`
...Comme la candidate a tracé une courbe croissante convexe et une corde entre les points de la courbe d'abscisses x et y, on lui demande à la fois :
`C'est quoi cette droite ?`
`Quel est le lien avec le nombre dérivé ?`

3. `Est-ce qu'on peut reprendre la démonstration de la dérivée du produit, il y a une erreur de signe.`
La candidate corrige.
`Pourquoi quand` y `tend vers` x `on a` $f(y)$ `qui tend vers` $f(x)$ `?`

4. `Reprenons la démonstration de la dérivée de l'inverse. Vous étudiez` $\frac{\frac{1}{g(y)}-\frac{1}{g(x)}}{y-x}$ `: pourquoi est-ce bien défini ?`

Un autre candidat 2008 :

1. `Vous avez donné le lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction. Comment pouvez-vous me démontrer ce résultat, en particulier que si la dérivée de` f `est positive sur` I `alors` f `y est croissante ?`

2. `Pouvez-vous nous donner une fonction continue en` a `mais non dérivable ?`
Par exemple $x \mapsto |x-a|$.
`Quelles sont les dérivées à gauche et à droite en` a `?`

3. `Pouvez-vous démontrer le théorème sur le quotient de deux fonctions dérivables ?`

4. `Pouvez-vous démontrer le théorème sur la réciproque d'une fonction dérivable ?`

Exposé 63 : Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Etude de la continuité, de la dérivabilité. Exemples.

Comme d'habitude, le jury ne prononce pas un mot durant les vingt-cinq minutes que dure la présentation de l'exposé. Le candidat a utilisé une calculatrice pour illustrer sa leçon avec des graphes de fonctions.

1. `Vous avez parlé de symétrie orthogonale par rapport à l'axe` $y = x$ `des graphes des fonctions` x^2 `et` $\sqrt{x}$`. Pourtant je n'ai pas l'impression que cette symétrie soit réalisée !`
En effet, le repère n'est pas orthonormé !
`Dans ce cas, que peut-on dire ?`

2. Le candidat a cité le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer la surjectivité.
`Pouvez-vous énoncer ce théorème précisément ?`
Le candidat écrit en commentant : $f \ : \ I \to J$ et $\forall y \in J$, $\exists x \in I$, $f(x) = y$ et $f(I) = [m, M]$ avec m et M les extremums de f.
`Bon, est-on sûr que` $f(I)$ `est de la forme` $[m, M]$ `?`
Pour cela il faut rajouter en hypothèse que I est fermé, que $I = [a, b]$.
`Pourquoi ?`
Car l'image d'un intervalle fermé par une application continue est fermé.
`Est-ce que c'est sûr ?`
...un peu plus loin...
`Finalement, est-ce que le cadre` $I = [m, M]$ `est le bon ?`

Les souvenirs d'une candidate 2008 :

1. La candidate démontre que si une fonction strictement monotone est continue, la fonction réciproque est continue.
`Pouvez-vous l'interpréter géométriquement ?`

2. `Vous avez dit que le graphe de la fonction réciproque est image de celui de la fonction par la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice. Pour cela, a-t-on besoin d'un repère quelconque, orthogonal ou orthonormé ?`
Un repère quelconque suffit.
`Est-ce que vous pouvez le démontrer ?`

3. `Est-ce qu'on peut voir la démonstration de la dérivabilité de la fonction réciproque ?`

Un candidat 2008 nous rapporte ses souvenirs du passage d'un collègue 2008 :

1. Pouvez-vous démontrer le théorème énoncé concernant la symétrie des courbes représentatives de f et f^{-1} ?
...
Si M est le point du plan de coordonnées (x, y), quel est le symétrique de M par rapport à la droite $y = x$?
C'est le point de coordonnées (y, x).
Alors pouvez-vous faire le lien avec les fonctions réciproques ?

2. Le candidat a énoncé le théorème suivant : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction strictement monotone sur I. Alors f est une bijection sur I.

Pouvez-vous corriger ce théorème ?
...
Avec cet exemple : $f\ : [1,3[\to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x$ si $x \in [1,2[$ et $x \mapsto x+1$ si $x \in [2,3[$?
...
Pouvez-vous montrer la surjectivité ?
...
Pouvez-vous donner la définition d'une fonction surjective ?

3. Comment introduisez-vous la fonction logarithme au regard des nouveaux programmes ?

Exposé 65 - Inégalité des accroissements finis. Exemples d'applications à l'étude de suites et de fonctions. L'expos é pourra être illustr é par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

1. Le candidat a énoncé un principe de Lagrange qui concerne une fonction dérivable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$: la fonction f est strictement croissante sur $[a, b]$ si et seulement si f' est strictement positive sur $[a, b]$.
`Est-ce que vous êtes sûr de votre énoncé ?`
...
`Par exemple avec la fonction qui à` x `associe` x^3 `sur l'intervalle` $[-1, 1]$ `?`
En effet...
`Comment corriger l'erreur ?`
...je ne vois pas.
`Est-ce qu'on peut voir la démonstration ?`

2. Le candidat a énoncé un théorème du point fixe : soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. S'il existe $k \in [0, 1[$ tel que pour tout $x \in [a, b]$ on ait la majoration $|f'(x)| \leq k$, alors l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[a, b]$.
`Est-ce que vous êtes sûr de votre théorème du point fixe ?`
...
`Concernant l'intervalle d'arrivée ?`
...
`Comment montrez-vous l'existence ?`
En considérant une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et son premier terme dans $[a, b]$.
`Justement, que faut-il pour que cette suite soit bien définie ?`
Le candidat corrige son énoncé.

3. `Pouvez-vous démontrer ce théorème du point fixe ?`

4. Le dernier énoncé de l'exposé est celui des approximations successives : sous les hypothèses du théoréme du point fixe, on considère une suite définie par son premier terme $u_0 \in [a, b]$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors la suite (u_n) converge vers le point fixe l de f et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité $|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$.

`Pouvez-vous démontrer ce dernier corollaire ?`
Le candidat le démontre.
`Pouvez-vous nous donner un exemple d'utilisation à la calculatrice ?`

Exposé 67 - Formules de Taylor. Applications.

1. Est-ce qu'on peut reprendre les hyptohèses de votre formule de Taylor-Lagrange ?
...
Est-ce que vous connaissez la formule de Taylor Mac Laurin ?
...
C'est une formule de Taylor appliquée avec des polynomes.

2. Pouvez-vous démontrer la formule de Taylor avec reste intégral ?

3. Pouvez-vous définir $f = o(g)$ en a ?

Exposé 68 - Développements limités, opérations sur les développements limités.

1. `Qu'est-ce que c'est pour vous un développement limité ?`

2. `Est-ce qu'on peut intégrer un développement limité ?`
Oui, si $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o\big((x - x_0)^n\big)$, alors la primitive F de f vérifie $F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1} + o\big((x - x_0)^{n+1}\big)$.
`Une fonction a-t-elle une ou plusieurs primitives ?`

3. `Comment guider un élève pour qu'il calcule le développement limité de la fonction tangente en 0 ?`
On va utiliser le quotient de deux développements limités.
`Précisément, qu'est-ce qu'on va utiliser ?`

4. Le candidat dit que le développement limité d'un polynôme s'arrête.
`Qu'est-ce que vous voulez dire exactement ?`
Que si un entier n est plus grand que le degré du polynôme, le développement limité à l'ordre n sera donné par le polynôme.
`Comment le montrer ?`
Avec la formule de Taylor.
`D'accord, écrivez cette formule en un point` a.
Le candidat rédige proprement.
`Est-ce qu'on ne peut pas également le montrer en considérant la différence et la définition de "petit o" ?`

5. `A ce propos, est-ce qu'on ne peut pas utiliser une autre écriture pour` o `? Quel est l'avantage ?`

6. `Pendant l'exposé, vous avez dit qu'un développement limité donnait un équivalent. Est-ce que vous pouvez préciser ?`

♣ Quel est le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction cosinus ? Quel équivalent peut-on en déduire ?
♣ Est-ce qu'on a l'équivalent au voisinage de zéro : $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$?
♣ Est-ce qu'on a l'équivalent au voisinage de zéro : $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{7} + o(x^2)$?
♣ Qu'écrit-on souvent à la place de $o(.)$? Quels sont les avantages et inconvénients de chacune des notations ?

Exposé 70 : Fonctions logarithmes

Le candidat définit le logarithme comme la bijection réciproque de la fonction exponentielle. Il parle de morphismes de groupe en termes d'applications $f : (E, *) \to (F, \perp)$. Il parle de *truc* pour $*$ et d'*antitruc* pour $\perp$ ce qui fait rire le jury. Il en situe la définition en prérequis.

1. `Qu'appelez-vous un isomorphisme de groupe ?`
C'est un morphisme de groupe, c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $f(x*y) = f(x) \perp f(y)$ et qui est bijectif.
`Dans ce cas, est-ce que` f^{-1} `est un morphisme de groupe ?`
Oui !
`Pouvez-vous le démontrer ?`
...

2. Les résultats sur les propriétés héritées des fonctions réciproques ne sont pas situées en prérequis. A la place, le candidat, le candidat les cite dans l'exposé quand il en a besoin.
`Vous dites` f^{-1} `est dérivable, d'où ça vient ?`
...
`Vous vous placez à deux niveaux différents ! Soit cela fait partie de votre leçon, et vous le démontrez, soit vous placez certains résultats sur les fonctions réciproques en prérequis. Expliquez clairement !`

3. Comme le candidat évoque la caractérisation fonctionnelle de ln qu'il déduit de celle de la fonction exponentielle, on lui reproche :
`Il y a un problème dans l'exposé, vous reportez toutes les difficultés sur la fonction exponentielle... Par exemple, ici quel est l'énoncé pour la fonction exponentielle ?`
Le candidat écrit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non nulle, et $\forall (x, y) \quad f(x + y) = f(x)f(y)$ tel que $\exists x_0$ en lequel f est continue.
`Mais il manque quelque chose ?`
...
`Il y a la fonction constante égale à 1 qui convient aussi ! Quelles sont les fonctions qui vérifient cette équation ?`
Le candidat change alors x_0 en 0.

4. `Avez-vous vu qu'il y avait un` s `à logarithmes ?`
J'ai pensé à parler des logarithmes de base a, mais d'après le programme, il ne faut pas insister dessus.
`Mais pourtant il y a un` s `!`

5. Ils font énoncer au candidat la définition du logarithme à partir de l'intégrale.
`Pouvez-vous illustrer la notion de primitive à partir du graphe de la foncion` $\frac{1}{t}$ `?`

Le candidat dessine le graphe, place en abscisse $x > 1$ et hachure la surface à laquelle vous pensez.

`Et de l'autre côté de 1 ?`
Le candidat explique.
`Ok, alors écrivez une phrase.`
La fonction logarithme est la portion d'aire délimitée par...
`Une fonction n'est pas une portion ! Précisez...`
Le temps abrège ce dernier échange.

Un autre candidat propose un exposé en deux parties : dans la première il définit le logarithme à partir de l'intégrale de la fonction inverse et en fait l'étude. Dans une deuxième partie, il introduit le logarithme en base a.

Pressé par la montre, il finit en lançant que les fonction logarithmes sont caractérisées par l'équation fonctionelle $f(xy) = f(x) + f(y)$.

1. `En connaissez-vous la démonstration ?`
Non, j'ai essayé de la retrouver durant la préparation, mais sans succés.

2. `Quelles sont précisément les hypothèses ?`
Le candidat rajoute la non nullité.
`Vous ne demandez pas la continuité ?`
Non.
`Alors je comprends vos problèmes.`

3. `Vous avez montré que la fonction` $\ln$ `est injective, et vous en avez déduit la stricte croissance. Pouvait-on faire autrement ?`

4. `Vous avez défini le logarithme en base` a `pour` $a > 1$`. Pourquoi ce choix ?`
En effet, on peut étendre au cas où $a \in \mathbb{R}_+^*$.
`D'accord. Peut-on trouver un lien entre les fonctions` $\ln_a$ `et` $\ln_{\frac{1}{a}}$ `?`
Oui... Le candidat écrit le lien.
`D'accord : et quel est le lien entre les graphes des deux fonctions ?`

5. Dans la première partie de sa leçon, le candidat a annoncé les trois limites : $\lim_{x\to 0} \ln(x)x = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$ pour $\alpha > 0$.
`Pouvez-vous le démontrer ?`
Le candidat montre comment à partir d'un résultat on peut déduire les deux autres.
`Ok, et maintenant, sauriez-vous démontrer un des résultats sans admettre les deux autres ?`

6. `Quel sens donner à` $\int_1^x \frac{dt}{t}$`, par exemple en classe de Terminale ?`
A partir de la primitive.
`Sous quelles conditions une fonction admet-elle une primitive ?`
Voici un échange vécu par un autre candidat :
`A quoi servent les fonctions logarithmes ?`
En chimie.
`Oui, par exemple, pourquoi ?`
Pour les échelles logarithmiques.
`D'accord, quelle propriété importante a cette fonction ?`

Exposé 71 - Fonctions exponentielles

1. Pressé par le temps, le canddiat termine sur le théorème suivant :

Théorème : Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation fonctionelle $f(x+y) = f(x)f(y)$ si et seulement si c'est la fonction nulle ou la fonction exponentielle de base a.

`L'énoncé précédent est étrange ! Comment le corriger ?`

2. Je trace la fonction logarithme...
`Vous êtes sûr ?`

3. `Pour déterminer la limite de la fonction exponentielle en` $+\infty$`, quelle est l'idée de la démonstration ?`
La fonction est croissante donc tend vers $+\infty$?

4. `Vous avez montré dans l'exposé que pour tout rationnel` r `et tout réel strictement positif` a `on a` $a^r = exp_a r$`. Comment définir` a^r `?`
...
`Pour` $x > 0$`, comment est défini` $\sqrt{x}$ `?`

4. `Comment calculer la dérivée de la fonction exponentielle ?`

5. `On va regarder autre chose. Soit` $(x, y) \in \mathbb{R}^2$`. Comment montrer que` $3e^{\frac{x}{3}}.e^{\frac{2y}{3}} \leq e^x + 2e^y$ `?`
Ca découle de la convexité.
`Comment montrer que la fonction exponentielle est convexe ?`

♣ A quoi sert la fonction exponentielle ? Comment l'introduire ?
♣ Quels avantages et inconvénients présentent les différentes façon d'introduire l'exponentielle

?
♣ Que doit-on faire avec une classe de Terminale ?

Un candidat 2007 annonce au jury - du capes externe ! - qu'il vient d'obtenir le capes interne. Il propose un exposé dans lequel le logarithme n'est pas évoqué.

1. `Pouvez-vous décrire l'exponentielle en terme de logarithme ?`

2. `Connaissez-vous d'autres fonctions exponentielles ?`
Euh,...à part $exp(x)$?
`Oui.`
Je ne vois pas.
`Vous avez écrit la fonction exponetielle de base` e`, n'y en a-t-il pas d'autres ?`
Ah, les trucs de base a ?
`Oui, nous vous rappellons qu'il y a des "s" dans le titre.`

3. `Pouvez-vous dessiner la représentation graphique ?`
Le candidat dessine et précise la tangente en 0.
`Votre tangente, vous la dessinez sous la courbe ; l'est-elle toujours ?`
Non.
`Bon, et dans le cas des fonctions` $x \mapsto exp(3x)$ `et` $x \mapsto exp(\frac{x}{3})$ `?` ...
Etes-vous sûr de votre tracé de $x \mapsto exp(\frac{x}{3})$, par rapport à $exp(x)$?

4. `Pouvez-vous démontrer que` $exp(a+b) = exp(a)exp(b)$ `?`
...
Une idée au moins ?

5. `Vous avez supposé beaucoup de choses dans l'exposé. Lesquelles ?`
La continuité de la fonction, et j'ai mis de côté les cas où la la fonction exponentielle s'annule.

Exposé 72 - Croissance comparée des fonctions réelles $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto \ln(x)$ au voisinage de $+\infty$. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

1. La calculatrice a été beaucoup utilisée pendant l'exposé.
`Quelle est l'importance du rôle de la calculatrice dans une classe ?`
La candidate vante les qualités des nouvelles calculatries qui font du calcul formel et permettent donc de vérifier les résultats obtenus.
`Mettons qu'on ne dispose pas de calculatrice formelle, mais uniquement numérique. comment en tirer parti ?`

2. `Pour vous la calculatrice ne sert qu'à vérifier ?`
Pour cette leçon, oui.

3. Un exercice proposé par la candidate consiste à étudier la fonction définie par $f(x) = \frac{xe^x}{x^3+1}$. La candidate explique que la calculatrice calcule la dérivée $f'(x) = \frac{(x^4-2x^3+x+1)e^x}{(x^3+1)^2}$, et que toujours d'après la calculatrice $x^4 - 2x^3 + x + 1 \geq 0$.
`Est-il raisonnable cet exercice ?`
Ce n'est ni le plus dur, ni le moins dur...
`Quel est le problème avec cet exerice ?`
C'est le polynôme de degré 4. On pourrait rajouter des questions intermédiaires.

4. La candidate a tracé le graphes des fonctions puissances $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ et les compare.
`Est-ce que toutes les fonctions puissances ont l'allure de paraboles ?`
Oui.
`Considérez la fonction` $x \mapsto x^2$. `La fonction` $x \mapsto \sqrt{x}$ `est son inverse ?`
Ah non ! C'est sa réciproque.
`(rires du jury). C'est vrai... Est-ce que c'est une fonction puissance ?`
Oui.
`Et est-ce qu'il y en a d'autres ?`

5. `Restons avec` $\sqrt{x}$. `Admet-elle une direction asymptotique ?`
Oui, la droite (Ox).
`Est-ce qu'il y a d'autres fonctions puissances qui admettent cet axe comme direction oblique ?`

6. `Est-ce qu'on peut étudier la limite de` $\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$ `en` $+\infty$ `?`

La candidate affiche avec la calculatrice une portion du graphe. On n'y voit pas grand chose.

`Il faut peut être zoomer plus ?`

...

`Et si on regardait` $\frac{x^{0,01}}{\ln(x)}$ `?`

7. `Et si on revenait sur cette fonction` $\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$ `qui tend vers` $+\infty$ `en` $+\infty$`. Comment le prouver ?`

La candidate cherche...

`Supposons connue la limite de` $\frac{x}{\ln(x)}$ `en` $+\infty$`. Pouvez-vous l'utiliser pour montrer que` $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\ln(x)}$ `tend vers` $+\infty$ `?`

On calcule la dérivée qui est négative. La fonction est décroissante, et comme elle est positive, elle tend vers 0.

`Mais elle est également minorée par` -2`. Admet-elle` -2 `comme limite ?`

...

`Revenons à la suggestion. Est-ce qu'on ne peut pas faire intervenir` $\ln(x^{\frac{1}{3}})$ `?`

Exposé 74 - Convexité

Pour situer, ces questions suivent un exposé très clair. J'apprends par la suite que la candidate était surtout inquiète du rendu de ses vêtements !

1. `Vous avez dit que si` f `est convexe, alors pour tout` $\lambda \neq 0$ `on a` λf `convexe...`

2. `Vous avez dit que les trois propositions étaient équivalentes. D'habitude, dit-on que des propositions sont équivalentes ?`

3. `Vous avez cité comme application l'inégalité`

$$(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n}.$$

`Démontrez la précisément.` On lui demandera de démontrer dans le détail les deux inégalité, bien que celle de gauche ait été rédigée parfaitement.

4. `Vous avez dit que si` f `est dérivable,` f `est convexe si et seulement si` f' `est croissante. Que peut-on dire de la régularité d'une fonction convexe en général ?`
Une fonction dérivable sur un intervalle ouvert est dérivable à gauche et à droite en tout point.
`Pouvez-vous le démontrer ?`
... pendant que la candidate cherche au tableau, on lui suggère de faire un dessin. Ca la perturbe, alors on lui dit de laisser tomber ce dessin et de reprendre comme elle comptait faire. Elle réussit.
`Finalement, pouvez-vous nous le montrer sur le dessin ?`

5. `Peut-on dire autre chose sur la régularité, par exemple sur un intervalle ouvert ?`
Oui, la continuité.
`Bien, pourquoi ?`
...
`Bien. Et pour la dérivabilité, peut-on dire quelque chose de mieux ?`
...je ne vois pas...
`Bon, je pensais à la dérivabilité presque partout, ou quelque chose dans ce goût là.`

Une autre candidate se rappelle ses questions :

1. Est-ce qu'on peut reprendre la démonstration de la caractérisation par les pentes ?

2. Finalement, dans le cas d'une fonction convexe, pourquoi la courbe est-elle en dessous de ses cordes ?
...
Qu'est-ce que ça veut dire ?

3. Pouvez-vous démontrer votre théorème qui affirme que si f est dérivable sur un intervale I, f est convexe si et seulement si f' est positive ?

4. Connaissez-vous des exemples d'application dans la vie de tous les jours ?

Exposé 75 - Applications de la dérivation à l'étude des extremums éventuel d'une fonction numérique d'une variable réelle. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

1. Vont rentrer dans le cadre de l'exposé les fonctions réelles f définies sur un intervalle I. La définition donnée d'un extremum local dans l'exposé est la suivante :

On dit que f admet un maximum (respectivement minimum) local en x_0 s'il existe un intervalle J tel que $\forall x \in I \cap J \quad f(x) \leq f(x_0)$ (respectivement $\forall x \in I \cap J \quad f(x) \geq f(x_0)$).

`Tracer une courbe.`
Le candidat dessine la courbe suivante : (*reprendre faire la figure*)

`Est-ce qu'il y a un maximum local ?`
Oui... Ici en x_0.
`Avec votre définition, si on prend` x_1 `quelconque et` $J = \{x_1\}$ `...`
Oui, il faut rajouter $x_1 \in J$.
`Vous êtes sûr ?`

2. La première propriété annoncée est la suivante :
Le troisième théorème de la leçon est le suivant : Soit f continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si $\forall x \in I \setminus \{a\}$ on a $(x-a)f'(a) \geq 0$, alors f admet un minimum global en a.
`Essayons de voir ce théorème avec la fonction` $x \mapsto x^3$.
Ca ne marche pas.
`En fait, qu'est-ce qui se passe si` $f''(a) = 0$ `?`

3. Le premier théorème de la leçon est le suivant : soit f continue en a et dérivable en a. Si f admet un extremum en a, alors $f'(a) = 0$. Il est suivi d'un exercice : déterminer α tel que la fonction $f(x) = \alpha \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x)$ admette un extremum en $\frac{\pi}{3}$.
`Est-ce que cet exercice est bien situé dans l'exposé ?`
Non, il faudrait le mettre plus loin, aprés les conditions suffisantes.
`Comment en modifier l'énoncé pour pouvoir le laisser là ?`

4. `Reprenons la courbe de tout à l'heure. Le point le plus à droite est-il un minimum local ?`
Oui.
`Et pourtant la dérivée en ce point n'est pas nulle ?`
En effet.
`Comment peut-on corriger l'énoncé faux alors ?` (il s'agit de l'énoncé de la question 3.)

5. `Reprenons le premier énoncé faux.` (donc pour vous lecteur celui de la question 2)
`Qu'est-ce qui peut se passer ?`
Je ne vois pas.
`Qu'est-ce que ça veut dire` $(x-a)f'(a) \geq 0$ `?`
A oui, il faut remplacer par $(x-a)f'(x) \geq 0$.
`En effet. Quel est le sens de cette hypothèse ?`
Je ne vois plus.
`Quand vous faites un tableau de dérivée, comment voyez-vous qu'il y a un extremum ?`

6. `Pourquoi si` f' `est positive sur un intervalle` I `on a` f `croissante ?`
Avec l'égalité des accroissements finis.
`Vous en auriez une preuve ?`
Avec le théorème de Rolle.
`Oui, et comment démontrer le théorème de Rolle ?`

7. `Vous avez mis le théorème de Taylor-Young en prérequis. Pourquoi ?`
Pour le théorème donnant une condition suffisante pour avoir un extremum local.

Exposé 76 - Primitives d'une fonction continue sur un intervalle ; définition et propriétés de l'intégrale, inégalité de la moyenne. Applications.

1. Le candidat a écrit :
Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique si il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$ on ait, et $\forall k \in \mathbb{R}$ l'égalité $f(x + kT) = f(x)$.
`Quelles sont les fonctions qui vérifient cette propriété en fait ?`
Ah oui... Ce sont les fonctions constantes. Il faut changer $\forall k \in \mathbb{R}$ en $\forall k \in \mathbb{N}$.
`Oui. Et maintenant, quelles sont les fonctions qui vérifient cette propriété ?`
Ce sont les fonctions périodiques ?
`Et si on prend` $T = 0$ `?`
Toutes ! Oui, il faut prendre $T > 0$.

2. La candidate a écrit l'interprétation géométrique de l'intégrale : $\int_a^b f(t)\ dt$ est l'aire comprise entre le graphe de f et les droites d'équation $y = 0$, $x = a$ et $x = b$.
`Est-ce que vous pouvez reprendre l'interprétation de l'intégrale ?`

3. Dans l'exposé, l'intégrale $\int_a^b f(t)\ dt$ est défine comme la différence $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f.
`Considérons le cas où` f `est positive. Qu'est-ce qui me dit que` $F(b)-F(a)$ `est une aire ?`

4. `Vous avez appelé la propriété` $\int_a^b f(t)+g(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt + \int_a^b g(t)\ dt$ `linéarité. Est-ce vraiment ça ?`

5. `Vous avez écrit que si` $f \leq g$ `sur l'intervalle` $[a, b]$`, alors` $\int_a^b f(t)\ dt \leq \int_a^b g(t)\ dt$. `D'où ça vient ?`

6. La candidate a commencé par donner le cadre de son exposé. Elle a dit qu'on allait considérer une fonction f continue sur un intervalle $I = [a, b]$. Mais dans la première partie, elle définit la primitive d'une fonction sur un intervalle $]a, b[$.
`Pour définir une primitive, pourquoi ce choix d'un intervalle ouvert` $]a, b[$ `?`

7. `Comment démontrez-vous que si` f `est paire sur` $[-a, a]$`, on a` $\int_{-a}^a f(t)\ dt = 2\int_0^a f(t)\ dt$ `?`
J'utilise le théorème du changement de variable.
`Ce théorème est-il au programme de Terminale ?`
Non.
`Comment faire à ce moment là ?`

A un autre candidat :

`Peut-on utiliser les intégrales pour calculer des longueurs d'arc ?`

`Pourquoi utilise-t-on le symbole` $\int$ `?`
♣ Qui l'a introduit ?
♣ Qu'est-ce que ce dx ? Que répondre à un élève qui pose cette question ?

Arrive maintenant le tour d'une candidanne 2007. Elle nous comunique l'exposé qu'elle pense avoir fait (dans les pages qui suivent) et les questions qui lui ont été posées (ci-dessous). Un grand merci !

1. `Existe-t-il des primitives de fonctions non continues ?`

2. `En quoi le théorème affirmant l'existence de primitives de fonctions continues est-il utile dans l'exposé ?`
(Bien regarder !!)

3. `Comment définissez-vous la partie positive d'une fonction ?`
...
`Pourquoi est-elle continue ?`

4. `Si` $b < a$, `quelle est la définition de l'intégrale` $\int_b^a f(x)\ dx$ `d'une fonction continue` f `?`
...
`Quel est le lien avec la relation de Chasles ?`

5. `Quel est le lien entre primitives et intégrales ?`

Leçon 76
Primitives d'une fonction continue sur un intervalle; définitions et propriétés de l'intégrale, inégalité de la moyenne.

Niveau : Terminale S (à priori).
Pré-requis :
– Fonctions : continuité, dérivabilité.
– Dérivées des fonctions usuelles.
– TVI.
– Lien entre le sens de variation et le signe de la dérivée d'une fonction.

Cadre : I intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point.

Introduction : Dans cet exposé, nous allons définir ce qu'est une primitive d'une fonction continue, puis la notion d'intégrale, et nous ferons le lien entre ces deux notions.

1 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

1.1 Définition

Définition 1 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I. On appelle* primitive de f sur I *toute fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $F^{'}(x) = f(x)$.*

Ex : Soient f et F les fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x \end{array} \qquad F : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$$

On remarque que f est continue, F est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F^{'}(x) = f(x)$. Donc F est une primitive de f.

Théorème 1 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I. Alors f admet au moins une primitive sur I.*

Remarque : dans cet exposé, nous admettrons ce théorème.

1.2 Propriétés

Théorème 2 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I. Soit F une primitive de f sur I. Alors $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$.*

Preuve
« $\Rightarrow$ »Soit $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f sur I. Alors, pour tout $x \in I$, $G^{'}(x) = f(x)$. Donc pour tout $x \in I$, $(G - F)^{'}(x) = 0$. Donc $G - F$ est constante sur I : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$ $G(x) = F(x) + k$.
« $\Leftarrow$ »Soit :

$$G : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto G(x) = F(x) + k \end{array}$$

Alors pour tout $x \in I, G^{'}(x) = F^{'}(x) = f(x)$. Et donc G est une primitive de f.
$\square$

Remarque : Ainsi toute fonction continue admet une infinité de primitives.

Ex : Primitives des fonctions usuelles

Domaine d'existence de primitives	Fonction	Primitive
$\mathbb{R}$	x^n	$\frac{1}{n+1}\ x^{n+1}$
$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
Domaine de continuité de u	$u^{'}u^{\alpha}$, $\alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1}\ u^{\alpha+1}$

Corollaire 1 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I. Soit $a \in I$. Alors il existe une unique primitive F_a de f telle que $F(a) = 0$.*

Preuve
- f admet une primitive F par le théorème 1. Posons :

  $$F_a : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto F(x) - a \end{array}$$

  Alors par le théorème 2, F_a est une primitive de f. Et $F_a(a) = 0$: d'où l'existence.
- Supposons qu'il existe G primitive de f sur I telle que $G(a) = 0$. Alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$ $G(x) = F_a(x) + k$. Or $G(a) = 0 \Leftrightarrow F_a(a) + k = 0 \Leftrightarrow k = 0$.
  Donc $G = F_a$: d'où l'unicité.

$\square$

Proposition 1 *Soient f et g définies de I dans $\mathbb{R}$ continues, F une primitive de f sur I, et G une primitive de g sur I. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $F + \lambda G$ est une primitive de $f + \lambda g$ sur I.*

Preuve
$(F + \lambda G)^{'}(x) = F^{'}(x) + \lambda G^{'}(x) = f(x) + \lambda g(x)$
$\square$

2 Intégrale d'une fonction continue

2.1 Cas d'une fonction à valeurs positives

Définition 2 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I, à valeurs positives. Soit $(a,b) \in I^2$, $a < b$. On appelle* intégrale de a à b de f *l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \quad et \quad 0 \leq y \leq f(x)\right\}$. On note $\int_a^b f(x)dx := \mathcal{A}$.*

2.2 Cas d'une fonction à valeurs négatives

Définition 3 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I, à valeurs négatives. Soit $(a,b) \in I^2$, $a < b$. On appelle* intégrale de a à b de f *l'opposé de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine :*
$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \quad et \quad f(x) \leq y \leq 0\right\}$. On note $\int_a^b f(x)dx := -\mathcal{A}$.

2.3 Cas d'une fonction de signe quelconque

Définition 4 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I. Soit $(a,b) \in I^2$, $a < b$. On note f^+ la partie négative de f, et f^- sa partie négative. On appelle* intégrale de a à b de f *le nombre :*
$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx$.

2.4 Propriétés de l'intégrale

Proposition 2 *Soient f et g deux fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(a,b) \in I^2$, $a < b$. Alors $\int_a^b (f + \lambda g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda \int_a^b g(x)dx$.*

Preuve
après le paragraphe 2.6
□

Proposition 3 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I. Soit $(a,b) \in I^2$, $a < b$. Soit $c \in [a,b]$. Alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.*

Preuve
OK par les aires ...
□

Remarque :
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Définition : $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Proposition 4 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I à valeurs positives. Soit $(a,b) \in I^2$, $a < b$. Alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.*

Preuve
OK par définition de l'intégrale ...
□

Proposition 5 *Soient f et g deux fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$. Alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$*

Preuve
$g - f$ est continue sur I à valeurs positives, donc d'après la proposition 4, $\int_a^b (g-f)(x)dx \geq 0$.
Par linéarité de l'intégrale, on obtient le résultat.
□

2.5 Inégalité de la moyenne

Proposition 6 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I. Supposons qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in I$, $m \leq f(x) \leq M$. Soit $(a,b) \in I^2$, $a < b$. Alors : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$*

Preuve
Par la proposition 4 on a : $\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$.
D'où : $m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\int_a^b dx$. Et $\int_a^b dx = b - a$. D'où le résultat.
□

Proposition et Définition 7 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I. Supposons qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in I$, $m \leq f(x) \leq M$. Soit $(a,b) \in I^2$, $a < b$. Alors : il existe $c \in I$ tel que $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.*
Le réel $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ est appelé valeur moyenne de f sur [a,b].

2.6 Lien intégrale-primitive

Théorème 3 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I. L'application :*

$$F : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_a^x f(t)dt \end{array}$$ *est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

Preuve (présentée le jour J)
- $F(a) = 0$: OK
- Soit $x_0 \in I$. Montrons que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$.
  $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{x-x_0} = \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x-x_0}$
  D'après le TVI, il existe $c_x \in [x_0, x]$ ou $[x, x_0]$ tel que $\frac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x-x_0} = f(c_x)$.

  Or f est continue sur I et $\lim_{x \to x_0} c_x = x_0$ donc $\lim_{x \to x_0} f(c_x) = f(x_0)$.
  Donc $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$ et donc F est dérivable en x_0, et $F'(x_0) = f(x_0)$. Donc F est dérivable sur I et $F' = f$. □

Remarque :

- On aura donc, pour $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et $(a, b) \in I^2$, $a < b$:
  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, avec F primitive de f sur $[a, b]$.
- Grâce à ce théorème, on peut montrer la linéarité de l'intégrale.

3 Applications

- Caculs d'aires.
- Equation différentielles du premier ordre à coefficients constants.

Exposé 77 - Intégrations par parties, par changement de variable. Exemples et applications.

1. Le candidat a énoncé le théorème d'intégration par partie : si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, et si g est une fonction dérivable sur cet intervalle, on a l'égalité $\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$.
`Est-ce qu'il ne manque rien ?`

2. Comme application de l'intégration par parties, le candidat a proposé le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t}\sin(t)dt$.
`Est-ce que vous voyez une autre méthode ?`

3. Le candidat a proposé le calcul de l'intégrale $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}dt$ par changement de variable.
`Est-ce qu'on peut simplifier ?`
Oui, avec la parité.
`Et est-ce qu'on ne peut connaître rapidement le résultat sans calculs ?`
Oui, car la fonction $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}dt$ est un cercle.
♣ Est-ce qu'on peut proposer cet exercice en Terminale ?

4. `Est-ce que vous pouvez démontrer l'équation fonctionelle du logarithme à partir de la définition du logarithme comme primitive ?`

Une question posée à un candidat en 2007 :
`Pouvez-vous étudier la limite de la suite suivante ?`

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$$

♣ (Une situation qui peut se présenter.) Vous énoncez le théorème de changement de variables en termes d'égalité de deux intégrales. Mais quand vous l'appliquez, vous utilisez une règle $u = f(x)$ d'où $du = f'(x)\ dx$? Quel est le lien ? Quel est le statut de cette égalité ?

♣ Une de vos applications du théorème de changement de variables est une égalité concernant les intégrales de fonctions périodiques. Que dire en classe de Terminale ?

♣ Le théorème du changement de variable est-il au programme en classe de Terminale ? Qu'est-ce que ça vous inspire ?

Un candidat 2008 :

D'après la personne qui nous rapporte l'exposé, celui-ci est classique et clair. Le candidat part d'un problème qu'on ne sait pas résoudre en début d'exposé pour avoir un fil directeur.

1. `Savez-vous calculer` $\int_0^1 t^2e^{-3t}dt$ `?`

2. `Pouvez-vous démontrer la formule de Taylor avec reste intégral ?`

3. `Est-ce que lors d'un changement de variable le choix de la fonction` ϕ `permettant le calcul est unique ?`

4. `Calculer` $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)dt}{1+\sin^2(t)}$.

5. `Calculer` $\int_a^b (x-a)(b-x)(x-\frac{a+b}{2})^2dx$.

Exposé du 3 juillet 2006 - Problèmes de calculs de grandeurs. Calculs de longueurs, d'aires et de volumes.

1. `Est-ce que vous pouvez rédiger la réponse à la question 5) ?`
Je ne l'ai pas trouvée.
`Et bien on va vous aider. Quelle est l'intersection de la droite` $A'J$ `et du plan contenant les points` D, C `et` C' `?`

2. `Est-ce que vous pouvez dessiner le cube au tableau ?`
La candidate dessine le cube, en faisant attention aux pointillés.
`Quelle différence faites-vous entre les traits pleins et les traits en pointillés ?`

3. Un des exercices proposés par le candidat est destiné à une classe de troisième. Il propose le calcul de l'aire d'une pyramide.
`Est-ce que vous pouvez résoudre cet exercice ?`
Le candidat commence à le résoudre en consultant ses notes.
`Est-ce que vous pouvez le faire sans consulter vos notes ?`
♣ Comment calcule-t-on le volume d'une pyramide ? Pourquoi ?

4. `En quelle classe étudie-t-on le théorème de Pythagore ?`

5. `Revenons à la première question de l'exercice.`
Le triangle $A'C'D$ est équilatéral, il suffit d'avoir un côté pour pouvoir le tracer. Le côté est de longueur $4\sqrt{2}$. On utilise la calculatrice pour avoir une approximation, puis on reporte...
`Est-ce qu'on est vraiment obligé d'utiliser la calculatrice pour construire un segment de cette longueur ?` Non, on peut également utiliser la diagonale d'un carré.

♣ Considérons deux points X et Y placés sur le cube, par exemple sur deux faces différentes. Une coccinelle veut aller d'un point à l'autre sans ouvrir les ailes. Quel est le plus court chemin ?
♣ (pour aider) Comment faire construire un dé à des élèves ?

♣ Même coccinelle sur un cylindre.

Dossier du 12 juillet 2006 - Outils. Calcul vectoriel et géométrie analytique.

1. `Pouvez-vous résoudre la première question de l'exercice au tableau.`
Le candidat rédige très soigneusement la réponse ; on le coupe :
`Passons à la question 2).`

2. Le candidat vient de déduire l'équation du plan tangent à une sphère à la sphère $\mathcal{S}$ en A en utilisant les coordonnées du vecteur $\vec{\Omega A}$ et le produit scalaire.
`Vous savez trouvez l'équation du plan tangent à une sphère en un point. Mais si on vous pose la meme question avec un cône dont vous avez l'équation ?`

3. `Intéressons nous à l'intersection d'un cercle et d'une droite. Est-ce que vous pouvez décrire et illustrer les différents cas ?`

4. Pour calculer la distance du point $\mathcal{P}_2$ à A, le candidat a utilisé l'égalité $d(\Omega, \mathcal{P}_2) = \frac{|2+0-(-1)+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}$.
`A quoi correspond le nombre dont on prend la valeur absolue ?`

5. `Vous avez utilisé` $\frac{4}{\sqrt{3}} \leq 2$. `Comment le montrer ?`

On a posé les questions suivantes à un deuxième candidat :

1. `Vous avez utilisé le fait que` (a, b, c) `est vecteur normal au plan d'équation` $ax + by + cz + d = 0$. `Pourquoi c'est vrai ?`

2. `Comment justifier que le projeté orthogonal d'un point` A `sur un plan est le point du plan qui minimise la distance à` A `?`

Et une autre celles-ci :

1. La candidate a écrit :

Définition : Un plan $\mathcal{P}$ coupe une sphère $\mathcal{S}$ de centre Ω et de rayon R si $d(\Omega, \mathcal{P}) > R$.
Le jury fait alors remarquer :

`Est-ce vraiment une définition ?`

2. Une proposition énoncée est la suivante :
Proposition : L'intersection d'un plan avec une sphère est un cercle.
`Et ici, il ne manque rien ?`

3. `Quels sont les différents cas d'intersection d'une sphère et d'un plan ?`
La candidate cite les différent cas.
`Est-ce que vous pouvez démontrer le cas où l'intersection est un cercle ?`
La candidate se lance dans des équations compliquées...
`Comment montre-t-on qu'un ensemble de points est un cercle ?`

4. `Comment représenter une sphère ?`

5. `Comment appelle-t-on les cercles sur la sphère dont le centre est le même que celui de la sphère ?`

6. `Dans l'exercice que vous proposez, il est question d'orthocentre. Comment calculer les coordonnées de l'orthocentre ?`

Question posée à une autre candidate :
`Qu'est-ce qu'un cercle dans l'espace ?`

Dossier du 13 juillet 2006- Probabilités conditionelles.

Le premier candidat commente le dossier et répond aux questions du dossier assis. Il termine assez vite. On lui demande :

1. `Est-ce que vous pouvez résoudre l'exercice proposé ?`

2. Pour calculer p_n, le candidat pose $u_n = p_n + \alpha$. Il calcule α pour que u_n soit géométrique, puis en remplaçant il trouve $p_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{-1}{3}\right)^n$.

`Est-ce une prise d'initiative que l'on peut attendre de la part d'un élève de Pemière S ?`

Non, il faudrait rajouter des questions intermédiaires.

`D'accord. Est-ce qu'il y a un autre moyen ?`

On peut les faire utiliser la récurrence.

3. `Quelle généralisation proposez-vous quand on passe à` k `côtés ?`

4. Le deuxième exercice proposé par le candidat est l'étude de la modélisation d'un jeu. On considère une succession de parties $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note P_n et G_n les évènements "le joueur perd la partie n" et "le joueur gagne la partie n", et on suppose qu'il n'y a pas d'autre alternative. Enfin, on suppose que $p_{P_n}(P_{n+1}) = 0,7$ et que $p_{G_n}(G_{n+1}) = 0,6$. L'exercice propose d'aboutir au système :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_{n+1} & = & 0,6x_n & + & 0,3y_n \\ y_{n+1} & = & 0,4x_n & + & 0,7y_n \end{array}\right.$$

`Est-ce qu'il y a un moyen de calculer` x_n `et` y_n `en fonction de` n `?`

Oui, avec les puissances de matrice.

`Et ici quel est le problème ?`

La matrice est pleine.

`Comment s'en sortir ?`

`On peut la diagonaliser.`

La deuxième candidate est une candidate.

Elle écrit ce qu'elle pense être l'objectif de l'exercice "Introduire et résoudre une suite $u_{n+1} = au_n+b$". A la fin de sa présentation, elle reconnaît avoir eu du mal à généraliser l'exercice du jury.

1. La candidate a écrit $p(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i \cap \Omega)$. Lecteur, regarde bien l'exercice du jury pour deviner la question suivante :
`Qu'est-ce que` Ω `?`
C'est l'ensemble des possibles.
`Et quel est le problème ?`[3]

2. La candidate a écrit que si A et B sont deux parties de Ω, on définit la probabilité de A sachant B par l'égalité : $p(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$. Elle a également écrit que pour une partition $(A_i)_{i\in\{1\ldots n\}}$ de Ω on a pour toute partie B de Ω la formule des probabilités totales $p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(B|A_i)p(A_i)$.
`Est-ce qu'il ne manque rien dans la définition d'une probabilité conditionelle ?`
Si, que $p(B) \neq 0$.
`Et dans la formule des probabilités totales ?`
Ici ce n'est pas grave, car si $p(A_i) = 0$ le produit sera nul.
`Si un terme n'est pas défini, son produit avec` 0 `est` 0 `?`
Oui.

3. `Est-ce que vous pouvez rédiger la réponse de la deuxième question de l'exercice jury ?`

4. Comme exercice, la candidate propose l'exercice classique où on considère une population, une maladie et un test médical. On note M l'évènement "être malade" et T l'évènement "réagir positivement au test". On connaît $p(M) = 0,07$ et $p(T|M) = 0,87$. On cherche $p(M|T)$.
`Vous avez parlé de deux arbres possibles pour cete exercice. Lequel apparaît naturellement ?`
Le premier.
`Est-ce que vous pouvez faire les calculs ?`

La troisième candidate est un candidat.

1. `Pouvez-vous rédiger la réponse à première question de l'exercice ?` (puis) `à la deuxième question ?` (et enfin) `à la troisième question ?`

2. Le candidat a justifié l'égalité $p(A_n) = p(B_n) = p(C_n) = p(D_n)$ par récurrence sur n.
`Comment justifier plus simplement ?`
Quel serait le sommet le plus important du carré ?
`Le sommet` A.
Combien avez-vous de chemins différents en deux coups pour aller de Ω à A ?
`Le candidat compte : ...deux.`
`Ok...et maintenant pour` B `?`
Immédiatement : Deux
`Comment faites-vous pour répondre si vite ?`
Ils jouent le même rôle.

[3] Peut être que le jury aurait aimé que quelqu'un lui dise qu'il est maladroit de choisir Ω pour désigner un point dans un exercice mêlant géométrie et probabilités !

`Si par exemple vous aviez listé les` 14 `chemins pour aller de` Ω `à` A`, comment trouver ceux pour aller de` Ω `vers` B `?`
Par permutation.
`Et est-ce que ça vous donne d'autres idées géométriques ?`

3. Le candidat propose le même exercie que le candidat précdent. Il écrit $p(M|\overline{T})$.
`Connaissez-vous une autre notation ?`
Oui, il y a $p_{\overline{T}}(M)$.
`Laquelle est au programme, et pourquoi ?`

4. A la fin de l'exercie, on a calculé les propbabilités suivantes : $p(M) = 0,005$; $p(\overline{M}) = 0,995$; $p_M(T) = 0,85$; $p_M(\overline{T}) = 0,15$; $p_{\overline{M}}(T) = 0,05$ et $p_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,95$. La dernière question de cet exercice est " Donnez votre avis sur la fiabilité du test."
`Est-ce que vous pouvez répondre à la dernière question que vous proposez ?`

Dossier du 14 juillet 2006 - Outils. Les barycentres.

1. `Vous avez dit pendant votre présentation que cet exercice était un cas particulier du théorème de Ceva. Comment le voir ?`
...
`Est-ce que vous pouvez énoncer le théorème de Ceva en termes de barycentres ?`
...
`Bon alors sans les barycentres.`
Les droites AP, BQ et CR sont parallèles ou concourantes si et seulement si $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}.\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$.
`D'accord, alors maintenant est-ce que vous pouvez nous l'énoncer en termes de barycentres ?`

2. `Est-ce que vous pouvez traiter la question 5) de l'exercice du jury ?`
Non.
`Alors la 4) ?`

Un autre candidat propose d'introduire et d'utiliser les notations du calcul analytique. Il s'en sert pour résoudre l'exercice quand on le lui demande.

1. `Alors, pour la question Q2, que répondriez-vous à un élève qui ne sait pas retrouver les coefficients du barycentre ?`
De réviser dans son livre de seconde.
`Il me semble que la méthode que vous proposez est loin du thème. Qu'est-ce que vous en pensez ?`

2. `Est-ce que vous pouvez rappeler la propriété d'associativité du barycentre ?`
Considèrons des points A, B et C, des coefficient α, β et γ et M le barycentre du système $\big((A,\alpha),(B,\beta)\big)$. Alors le barycentre du système $\big((A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\big)$ est le même que celui du système $\big((M,\alpha+\beta),(C,\gamma)\big)$.
`L'associativité n'est donc définie que dans le cas de trois points donc ?`
♣ A quoi faudrait-il faire également attention ?

Le troisième candidat est une candidate :

1. `Pouvez-vous résoudre les questions 1) et 2) de l'exercice du jury ?`
La candidate montre que $\vec{AC'} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ et donc que C' est le barycentre de ...
`D'accord, et pour les deux autres points ?`
Par analogie.
`Préciser cette analogie.`

2. La candidate vient d'écrire que
$M \in (AB) \;\Leftrightarrow\;$ M est le barycentre de (A,α) et de (B,β) avec α et β réels $\alpha+\beta\neq 0$.
`Est-ce qu'on ne peut pas l'écrire mieux ?`

3. La candidate écrit qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que I soit le barycentre du système $\big((B',3),(B,\alpha)\big)$...
`Pourquoi 3 ?`
Car aprés je compte remplacer B' par le barycentre de $\big((C,2),(A,1)\big)$.
`D'accord, mais que diriez-vous à un élève qui vous demande pourquoi vous prenez 3 ?`
...
`Est-ce qu'en faisant varier` α `on obtient toute la droite ?`
Non, il manque un point.
`Et est-ce qu'il existe un moyen d'obtenir toute la droite avec un seul coefficient ?`

6. Si A, B et C sont trois points de l'espace E non alignés, le premier exercice propose de déterminer le lieu des points $F = \{M\in E \mid ||2\vec{MA}+3\vec{MB}+5\vec{MC}|| = ||2\vec{MA}+3\vec{MB}-5\vec{MC}||\}$.

`Au passage, comment appelle-t-on les fonctions` $M\mapsto\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{MA_i}$ `?`
La candidate le sait.
`Que sait-on de cette fonction si` $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$ `?`
Elle est constante.
`Ok.`
(Quelques calculs plus loins...) On arrive à l'égalité $MG=c$, et donc le lieu des points cherchés est un disque, pardon un cercle.
`Un cercle ?`
Pardon, une sphère.
`Se peut-il que la constante` c `soit nulle ?`
`Comment faire pour obtenir un dique, toujours dans l'espace ?`

7. La candidate a également proposé un exercice sur les médianes d'un triangle non plat ABC.
On note A', B' et C' les milieux des segments BC, AC et AB.
`Est-ce que vous pouvez comparer les aires` ABC `et` ABA' `?`
La candidate donne le rapport.
`D'accord, et alors l'aire de` $A'B'C'$ `?`

Dossier du 15 juillet 2006

1. Le candidat propose comme exercice de considérer un cercle $\mathcal{C}$ et deux points A et B à l'intérieur de $\mathcal{C}$. Les questions de l'exercice permettent de construire des points C et D sur $\mathcal{C}$ tels que $ABCD$ soit un parallèlogramme.
`Regardons votre exercice. Quelle est l'image du cercle` $\mathcal{C}$ `par la translation de vecteur` $\vec{AB}$ `?`
C'est un cercle également.
`Pourquoi, et quels en sont les éléments caractéristiques ?`

2. Comme dans la résolution de l'exercice il est question de cercles sécants, on lui demande :
`Soient deux cercles de centres` O `et` O'`, de rayon` R `et` R'`. Sous quelle condition sont-ils sécants ?`

3. `Qu'est-ce que raisonner par analyse ?`

4. `Concernant l'exercice du jury, comment construire à l'avance une figure correcte ?`

5. `Comment définir une similitude directe ?`
Le candidat rappelle la définition.
`Est-ce qu'on peut les cataloguer ces similitudes ?`
Il y a les homothéties, les translations et les rotations. Les similitudes forment un ensemble stable par composition.
`Est-ce qu'il n'y a pas d'autres similitudes ?`

Le deuxième candidat est un candidat.

Pendant sa présentation, le candidat met en avant la démarche "Analyse-Synthèse" en expliquant les différentes étapes. Avec Cabri, il réalise une figure dynamique qui illustre l'exercice.

1. `Est-ce que vous pouvez résoudre la première question de l'exercice ?`

2. `Dans le cas de l'exercice, comment déterminer le rapport et l'angle de la similitude de centre` A `qui transforme` B `en` C `?`
Avec la trigonométrie, on a $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$.
`D'accord, et sans la trigonométrie ?`
Avec le théorème de Pythagore.

3. `Si on considère le plan complexe, quelle est l'expression de la similitude de centre` O, `de rapport` $\sqrt{2}$ `et d'angle` θ `?`
Le candidat écrit : $z' = \sqrt{2}e^{i\theta}z$.
`très globalement, quelle est l'écriture d'une similitude directe ?`
Le candidat écrit : $z' = az + b$.
`Et indirecte ?`

4. `Comment construire l'image d'une droite par une similitude directe de centre et d'angle donnés ?`

5. Le candidat a proposé un exercice pour "illustrer les liens entre triangles semblables et similitudes" : soit A, B et C trois points du plan, sommets d'un triangle non plat. Soit $\mathcal{C}$ un cercle. Construire trois points M, P et Q sur le cercle $\mathcal{C}$ tels que le triangle MPQ soit semblable au triangle ABC. L'exercice ne propose pas de questions intermédiaires.
`Est-ce que vous pouvez-le résoudre ?`
...
`On peut sans doute s'intéresser à un élément particulier relatif au triangle` ABC, `dont l'image par la similitude sera liée à ce que l'on cherche...`
Oui, le centre du cercle circonscrit.
`D'accord. Alors ?`
...
`Quel est le centre de l'homothétie qui transforme` O `en` O' `?`

Un autre candidat commence à dire que l'exercice jury permet d'utiliser les similitudes. Il demande alors s'il faut parler vingt-cinq minutes. Le jury lui répond qu'il peut parler au plus vingt-cinq minutes. Le candidat déclare alors "C'est fait. ".

1. `Est-ce que vous pouvez résoudre la première question ?`
Aprés quelques explications, le candidat dit que la similitude cherchée est celle de centre A et de rayon $\frac{\pi}{4}$.
`Est-ce qu'il n'y en a pas d'autres ?`
Je ne vois pas.
`Comment est orienté votre plan ?`

2. `Est-ce que vous pouvez résoudre la deuxième question ?`

3. `Concrètement, comment construire l'image de la droite` d `par la similitude` s `?`

Je propose de mesurer, d'effecture un calcul, puis de reporter.

`Est-ce que vous pensez que c'est ce qui est attendu dans un problème de géométrie ?`

4. L'exercice proposé par le candidat est le suivant. Soit une droite D, un cercle $\mathcal{C}$, et un point A. Construire un point B sur D et un point C sur $\mathcal{C}$ tels que le triangle ABC soit équilatéral.

`Est-ce qu'on peut passer à votre exercice ?`

Le candidat réalise une figure au tableau : la droite et le cercle ne sont pas sécants, et A est à l'intérieur de $\mathcal{C}$.

`Le point` A `est-il nécessairement à l'intèrieur de` $\mathcal{C}$ `?`

Exposé du 16 juillet 2006 - Fonctions. Etude du comportement local

1. `Précisez le théorème que vous utilisez pour avoir l'unicité de` x_0.
Si $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, et si f est continue, alors $\exists! c \in]a, b[\mid f(c) = 0$ comme f est strictement monotone.
`On peut le dire mieux !`

2. `Passons à votre deuxième exercice.`
Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (ax + b)e^x$ passe par $A(0, 2)$, et telle que la tangente en $\mathcal{C}_f$ en $B(1, f(1))$ soit horizontale.
`Est-ce que vous pouvez le résoudre ? Quels sont les enjeux ?`
...
`Est-ce qu'on peut rajouter une troisième condition ? Qu'est-ce qui peut se passer ?`

3. `Retournons à l'exercice proposé. Comment le professeur peut-il expliquer aux élèves pourquoi on pose la fonction` ψ `?`
La fonction s'annule en a si et seulement si $a\sin(a) = 1$, ce que l'on cherche.
`D'accord, mais alors pourquoi ne pas étudier` $x\sin(x)$ `?`
Je ne vois pas.
`Et bien imaginons que les élèves le cherchent. Qu'est-ce qui va se passer ?`
...
`Et bien, quelle est la différence fondamentale entre` $x\sin(x)$ `et` $\sin(x) - \frac{1}{x}$ `?`

4. `En fait, est-ce qu'il y a équivalence entre` $a\sin(a) = 1$ `et` $\psi(a) = 0$ `?`

5. `Vous pouvez rédiger la question 2) de l'exercice proposé ?`
La candidate calcule ψ', puis pour étudier ses variations calcule ψ''.
`L'élève fera sans doute comme ça. Est-ce qu'on ne peut pas faire autrement ?`
...Ah oui, ψ' est somme de deux fonctions décroissantes.
`Alors comment le faire remarquer à l'élève parti dans le calcul de` ψ''. `Le professeur peut l'aider en disant "Regarde bien` ψ''`..."`.

6. `Vous dites` $\psi'(x) > 0$ `sur` $]x_0, \pi]$, `donc` ψ `strictement croissante sur` $]x_0, \pi]$. `Peut-on rajouter` x_0 `?`
Je l'enlève pour que la fonction soit strictement croissante.
`Est-ce qu'on ne peut se sevir de la continuité ?`

Un deuxième candidat.

1. `Revenons sur la question Q1). Vous citez les outils "dérivée d'une fonction" et "équation de la tangente". Il manque un outil ou une méthode importante pour la résolution de cet exercice.`
...
`Comment faire pour compter les tangentes ? Combien peut-on compter de tangentes dans l'intervalle` $[0, x_0]$ `?`
Une seule, car ψ a un unique zéro dans cet intervalle.
`Ok, alors pour le montrer quel théorème on utilise ?`

2. `Vous pouvez rédiger la première question ?`
Le candidat calcule $\psi'(x) = \cos(x) + \frac{1}{x^2}$ et écrit $\psi''(x) = -\sin(x) - \frac{1}{x^3} < 0$.
`Il y a un problème de précision : il faudrait explique sur quel intervalle vous vous placez ?`
Le candidat rectifie.
`Ne peut-on montrer que` ψ' `est croissante sans calculer sa dérivée ?`

3. Lorsque le candidat écrit Pour $x \in [0, \pi]$ on a $\sin(x)$ décroissante :
`Ca n'a pas de sens !`

4. `Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.`
Si on a c entre $f(a)$ et $f(b)$, alors...
`Non, ça va plutôt commencer par "Soit` f `..."`
Le candidat l'écrit proprement.
`Est-ce que vous pouvez donner une version en terme d'intervalles ?`

5. `Connaissez-vous une démonstration intelligente de l'inégalité` $\ln(1+x) \leq x$ `?`
On dérive...
`Tracer` $\ln$ `peut-être...`

6. `Pour quelle classe situez-vous l'exercice que vous avez proposé ? Essayez de le résoudre.`

Troisième candidat :

1. La candidate calcule ψ'' pour étudier les variations de ψ'...

2. `Comment justifier l'existence et l'unicité de` x_0 `?`
Avec le théorème des valeurs intermédiares.
`Ce théorème assure-t-il l'unicité ?`
Non.
`Faites un dessin.`
La monotonie suffit.
`Une fonction constante est-elle monotone ?`
Il faut considérer la stricte monotonie en fait.

3. L'exercice proposé par la candidate est une étude d'aire. On considère le point M sur le cercle trigonométrique qui est repéré par l'angle x. On note A_M et B_M les projections orthogonales sur les axes (Ox) et (Oy). Enfin, on considère $a(x)$ l'aire du rectangle OA_MMB_M dont on cherche les variations et le maximum.
`Est-ce que vous pouvez résoudre l'exercice ?`
On calcule $a(x) = \sin(x)\cos(x)$, puis on dérive...
`Est-ce qu'on peut utilise une simplification de cette écriture pour chercher le maximum ?`
La candidate remarque la simplification. Au passage on lui demande :
`Quelle est la formule pour` $\cos(2x)$ `?`

4. Ces questions concernent la suite de l'exercice, sans doute une étude du périmètre du rectangle.
`Considérons les vecteurs` $\vec{u}(1,1)$ `et` $\vec{v}\big(\cos(x),\sin(x)\big)$`. Que vaut` $\vec{u}.\vec{v}$ `?`
On trouve $\cos(x) + \sin(x)$.
`A-t-on un moyen de majorer` $|\vec{u}.\vec{v}|$ `?`
On a l'égalité $|\vec{u}.\vec{v}| = ||\vec{u}||\vec{v}|| \cos(\vec{u},\vec{v})$.
`Oui, donc ?`
Donc $|\vec{u}.\vec{v}| \leq ||\vec{u}||\vec{v}||$.
`Dans quel cas a-t-on égalité ?`
La candidate trouve les conditions d'égalités.
`Est-ce que c'est quelque chose de connu ?`

Dossier du 18 juillet 2006 - Intégration. Calcul d'intégrales par des méthodes variées.

1. Le candidat propose un tableau récapitulatif des primitives connues :

f	$u'u^n$	$\frac{u'}{u}$	$u'e^u$
F	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$\ln(u)$	e^u

Dans votre tableau, pour quelles valeurs de $\mathbb{N}$ la première ligne est-elle définie ?
Partout sauf en -1.
Peut-on prolonger à $\mathbb{R}$?
...
Est-ce qu'on peut écrire $u'u^{\pi}$?

2. Passons à la deuxième ligne. Que dire ?

3. Revenons à la première ligne. Est-ce que ça marche pour $\cos(x)\sin^{\pi}(x)$?
...
D'abord, quel sens donner à $(-1)^{\pi}$
Il faut restreindre à n rationnel.
Alors quel sens donner à $(-1)^{\frac{1}{3}}$?

4. A-t-on ${a^{b}}^{c} = a^{b^c}$?

5. Le premier exercice proposé par le candidat consiste à calculer $\int_{-3}^{5} |x-1| + |x-2| dx$.
Dans le premier exercice que vous proposez, vous introduisez la fonction $f(x) = |x-1| + |x-2|$. Comment s'appelle une telle fonction ?
C'est une fonction affine par morceaux.
Est-ce que vous pouvez résoudre l'exercice de deux façons ?
Le candidat fait d'une part le calcul d'aire à partir de formules connues, puis utilise le calcul de primitives.
Pour calculer les intégrales de la fonction $f(x) = |x-1| + |x-2|$, quelle est la propriété importante ?

6. Vous dites souvent "e de x". Est-ce que ça a un sens ?
Il faut dire e puissance x.
Pourquoi l'exponentielle c'est e puissance x ?

7. Le candidat a dit "...ça fait ça fois ça".
`Qui est ça` ?

8. `Pouvez-vous nous donner la réponse de la question 3) ?`
Pour calculer $\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}$ on écrit $e^x \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$, puis on intègre par parties...
`Pourquoi le fait d'intégrer par parties va simplifier les choses ?`

La candidate suivante est une candidate :

1. `Vous avez dit que l'intégrale` $\int_a^b f(t)dt$ `était définie comme la différence` $F(b)-F(a)$ `avec` F `une primitive de` f. `Est-ce que ça dépend de` F `?`

2. `Pourtant vous dites aussi que l'intégrale est définie à partir de l'aire ? Alors quelle est la définition ?`
La candidate s'explique.
`Pouvez-vous démontrer le lien entre les deux points de vue ?`
`Par exemple, pour les fonctions constantes ?`
Dans ce cas l'égalité est immédiate.
`Qu'est-ce qu'on peut faire avec des élèves ?`

3. `Est-ce que vous pouvez justifier quand sert une intégration par parties ?`
Pour faire baisser le degré d'un polynôme par exemple.
`Par exemple pour` $\int_0^1 e^x \sin(x)dx$ `?`
On écrit $F(x) = \int_0^1 e^x \sin(x)dx$.
`Euh...qu'est-ce que vous voulez dire exactement ?`

4. Le premier exercice consiste à chercher les primitives de $(3x+2)e^x$, par identification à partir de fonctions $(ax^2+bx+c)e^x$. `En s'inspirant de votre exercice, est-ce qu'on ne peut pas proposer une méthode pour trouver la primitive de` $e^x \sin(x)$`?`

5. `Jusqu'ici, on a parlé de calculs exacts. Est-ce qu'on peut proposer des stratégies pour le calcul approché de l'intégrale de` a `à` b `d'une fonction ?`
On peut essayer par encadrement.
`Oui.` Il y a la méthode d'Euler, mais je veux pas m'y lancer...
`Lancez vous ici...`
...
`Par exemple quelquechose de très ancien inventé par Archimède.`
La méthode des rectangles.
`Oui, par exemple subdivisez l'intervalle au tableau en intervalles plus petits, et dessinez ces rectangles.`
La candidate dessine des rectangles au dessus, et en dessous du graphe de la fonction.
`D'accord, et qu'est-ce qu'on peut dire pour l'intégrale de la fonction ?`
La candidate écrit un encadrement de l'intégrale de la fonction entre deux somme d'aires de

rectangles.
`D'accord. Quel théorème on utilise pour justifier l'encadrement ?`
La candidate écrit : Si $0 < f < g$, alors $\int_a^b f(t)dt < \int_a^b g(t)dt$.
`Inégalité stricte, c'est sûre ?`
Ca dépend de conditions sur a et b.

Le troisième candidate est une candidate.

1. `Pouvez-vous répondre à la question 3) de l'exercice jury ?`

2. `Vous avez rapidement expliqué une stratégie pour la question Q2 : faire baisser l'exposant du dénominateur. Avez-vous une stratégie pour calculer` $\int_0^1 \frac{dx}{(1+e^x)^n}$ `?`
...
`Notez` u_n `cette intégrale. Pouvez-vous obtenir une relation de récurrence ?`
On écrit $\frac{1}{(1+e^x)^{n+1}} = \frac{1}{(1+e^x)^n} - \frac{e^x}{(1+e^x)^{n+1}}$, puis ...quelques calculs plus loin... $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n}\big((1+e)^{-n} - 2^{-n}\big)$. On calcule aussi $u_0 = 1$.
`Oui, pourquoi ça ne marche pas lorsque` n `vaut` 0 `?`
Le $\frac{1}{n}$?
`Oui, ça montre bien que quelque chose ne marche pas.`

3. Le deuxième exercice de la candidate propose de calculer les réels :

$$K = \int_0^\pi e^x \cos(2x)dx \ , \quad I = \int_0^\pi e^x \cos^2(x)dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi e^x \sin^2(x)dx.$$

Pour calculer K, l'exercice propose d'intégrer par parties en dérivant e^x et en intégrant $\cos(2x)$.
Pour calculer I et J, on passe par le calcul de $I + J$ et de $I - J$.
`Pour calculer` K`, on intègre par parties en dérivant l'exponentielle. Pourquoi pas le contraire ?`
Ca marche aussi.
`Si on n'a pas ces indications, comment calculer` I `directement ?`

4. L'exercice 2 propose le calcul de $\int_0^2 \frac{1}{(x-5)^2(x+1)}dx$. Dans ce but, une question intermédiaire demande le calcul des réels a, b et c tels que

$$\frac{1}{(x-5)^2(x+1)} = \frac{a}{(x-5)^2} + \frac{b}{(x-5)} + \frac{c}{(x+1)}.$$

`Ne devrait-on pas rajouter une question intermédiaire ?`
Oui, pour vérifier que l'intégrale est bien définie.
`Alors donnez-nous tous les intervalles sur lesquels on peut intégrer cette fonction.`

5. `Quelle méthode plus générale est utilisée sans être nommée dans l'exercice que vous proposez ?`

Un autre candidat nous donne les questions qui lui ont été posées. Nommons le Pierrot, par commodité. Pierrot a écrit au tableau (et dans un tableau) quels savoirs sont mis en jeu dans l'exercice, et quels savoirs ne le sont pas. Ils s'appuient sur les notions non mises en jeu dans l'exercice pour proposer ses exercices supplémentaires. Par exemple, il indique que l'exercice n'utilise pas l'intégration par partie et propose un exercice sur les intégrales de Wallis.

1. Répondant à la question Q2, Pierrot propose deux façon de guider un élève selon le contexte. Si on lui pose la question en classe, il propose de faire calculer $\frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{e^x}{(1+e^x)^3} + \frac{e^x}{(1+e^x)^4}$, en précisant éventuellement que la réponse est $1 - \frac{e^x}{(1+e^x)^4}$. Ensuite, il leur demandera de calculer l'intégrale. Si l'élève lui pose la question à la fin du cours, Pierrot lui parlera de décomposition en éléments simples.

`Comment un élève utiliserait votre indication ? Vous pouvez faire le calcul ?`
Pierrot fait les calculs puis s'excuse de parachuter cette solution.
`Pas du tout, vous avez trouvé une solution, cela nous convient.`

Et soudain surgit face au vent, le vrai Pierrot de tous les temps. Pierrot a proposé comme exercice le calcul des intégrales de Wallis $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\ dx$. Il précise qu'il ne souhaite pas aller plus loin, car c'est un exercice difficile (il explique que beaucoup de savoirs sont mobilisés). Il explique qu'on pourrait également poursuivre l'étude en montrant la convergence de la suite considérée I_n mais que cela ferait sortir du cadre qu'il s'est fixé.

2. `Alors pour les intégrales de Wallis, comment établirait-on la convergence ?`
Pierrot se sert du tableau comme d'un brouillon...
`Un élève vous pose la question et vous répondez ça ? C'est ce que vous appelez de la pédagogie ?`
Quoi ? Mais non, je cherche. Pour pouvoir exposer la solution, il faut que je la trouve.
`Comment, vous ne la connaissez pas ?`
Je comprends parfaitement qu'il m'est indispensable, sur un exercice que je propose, de parfaitement maîtriser et pouvoir expliquer la solution, mais cette question ne fait pas partie de mon exercice. J'ai mentionné qu'on pouvait poursuivre dans cette voie, mais ce n'est pas ce que j'ai fait, et je n'y ai pas réfléchi.
`Cherchez alors.`
Est-ce que je peux proposer une solution qui utilise des outils du supérieur ?
`Oui, si vous trouvez.`
Je montrerais d'abord que I_n équivaut à I_{n+1}, puis que I_{2n}^2 équivaut à $\frac{\pi}{2n}$.
`C'est faux.`
Pardon, I_{2n}^2 équivaut à $\frac{\pi}{2(2n+1)}$, et donc I_n^2 à $\frac{\pi}{2n}$.
`Ouais...`
Mince...
`Oui ?`
J'en concluerais bien que I_n équivaut à $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, mais en général les équivalents ne se comportent pas bien par composition, même par une fonction continue.
`Vous êtes sûr ?`
Je suis sûr qu'en général on ne peut pas composer par une fonction continue. Ici c'est vrai que

l'on peut : on doit être sous les hypothèses d'un théorème qui fait que ça marche...mais je ne vois pas lesquelles.

`Mais vous êtes sûr ?`

Bon, mais aprés tout, peut importe l'équivalent de I_n, vous m'avez juste demandé de prouver la convergence. Or la suite I_n^2 converge vers 0, donc I_n converge vers 0.

`Vous êtes sûr ?`

Oui, si j'ai une fonction f continue en a (ici racine carrée en 0) et une suite u_n qui tend vers a alors la suite $f(u_n)$ tend vers $f(a)$.

`Regardez avec la suite` $(-1)^n$`...`

D'accord, ajoutons l'hypothèse que u_n appartient à D_f pour n suffisament grand.

`Restons en là, comment montreriez-vous la convergence en Terminale ? Qu'est-ce qu'on a comme critère en Terminale pour montrer la convergence ?`

Cette suite est décroissante et minorée.

`Prouvez le proprement.`

Pierrot le montre avec beaucoup de soins, et justifie $I_{n+1} \leq I_n$ par la positivité de l'intégrale.

`Par croissance !`

Oui, par croissance, c'est pareil.

`Non, la croissance c'est la croissance, la positivité c'est la positivité. Et la limite, avec des outils de Terminale S ?`

Je ne vois pas...peut-être par l'absurde ?

`De toute façon, vous voyez bien que vous utilisez fondamentalement l'intégration par parties.`

S'ensuit une discussion pour savoir si Pierrot a ou pas dit que l'intégration par parties est hors-programme TS. Aujourd'hui, nous ne savons toujours pas ce que Pierrot a vraiment dit (même s'il n'en démord pas).

3. Pierrot sent la situation lui échapper. C'est promis, à partir de maintenant, il sera explicite comme jamais on a été explicite.

`On a vu ce que Wallis donnait...passons à l'autre exercice.`

Dans son deuxième exercice, Pierrot propose d'établir la divergence de la série harmonique $u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$. La première question invite à démontrer l'inégalité $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$ pour $k \geq 1$. La deuxième question demande d'établir l'inégalité $u_n \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x}$.

Aprés avoir rédigé très proprement la réponse à la première question, Pierrot écrit $\int_1^2 \frac{dx}{x} \leq 1$, puis $\int_2^3 \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{2}$ en dessous. Il écrit trois petits points, puis plus bas $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n+1}$. Il dit qu'en prenant la somme on obtient $u_n \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x}$, d'où $u_n \geq \ln(n+1)$. Il reprend : à mes yeux, c'est une preuve, mais il n'y a pas consensus à ce sujet. Je propose donc de le démontrer par récurrence...

`Si ce n'est pas une preuve, pourquoi vous l'écrivez ?`

Mais à mes yeux c'est une preuve.

`C'est une preuve ou c'est pas une preuve ?`

Pour certains c'est une preuve, pour d'autres ce n'en est pas une.

Dossier du 19 juillet 2006 - Divers types de raisonnements (par l'absurde, par récurrence).

1. La candidate présente les différent types de raisonnement. En particulier, elle exlique l'hérédite dans le raisonnement par récurrence :
On suppose $\mathcal{P}$(n) vrai. il faut montrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vrai. Dans ce cas, $\forall n \quad \mathcal{P}(n)$ est vrai.
`Est-ce qu'il n'y aurait pas un problème d'orthographe ?`
Il manque le e.
`L'hérédité est mal rédigée. est-ce que vous pouvez reprendre ?`
La candidate écrit : On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
`Ce n'est pas encore satisfaisant.`
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n)$ est vraie $\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie
`Est-ce que vous diriez "Le lycée Lakanal est à Sceaux est vraie" ?`
Non, on peut enlever les "est vraie".
`Est-ce qu'une récurrence commence toujours au rang` 0 `?`

2. `Est-ce que vous pouvez traiter la première question de l'exercice du jury ?`
Soit $m \in A$. On a $\frac{m+m}{\text{p.g.c.d}(m,m)} = 2 \ \in \ A$.
`Il manque quelque chose d'important.`
Oui, A est non vide.

3. `Est-ce que vous pouvez résoudre la deuxième question ?`
Je vais montrer que si A contient un entier $m = 2p+1$, alors il y a une infinité de termes dans A. En effet, comme 2 est dans A, on a $\frac{2p+1+2}{\text{p.g.c.d}(2,2p+1)} = 2p+3$ dans A.
`Et comment conclure ?`
Par récurrence sur m, on a une infinité de termes dans A.
`Est-ce qu'on peut reprendre ce point ?`

4. Le premier exercice proposé par la candidate est un exercice de géométrie pour illustrer le raisonnement par analyse-synthèse. Apparaissent dans l'exercice les points A et B. La candidate dit qu'elle considère l'homothétie h qui transforme A en B.
`Etes vous sûre de l'avoir bien définie ?`

La deuxième candidate est candidat.

1. Dans le premier exercice, on considère une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, non nulle, et qui vérifie l'équation fonctionelle $f(x+y) = f(x)f(y)$. Il faut montrer que la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
`Est-ce qu'on peut regarder ce premier exercice ?`
On utilise un raisonnement par contraposée. On a bien $f > 0$, car sinon $f \leq 0$ et...
`Quel est le contraire de` $f > 0$ `?`
Si on prend x de $\mathbb{R}$ tel que f est nulle...
`Reprenez précisément...`

2. `Passons à la deuxième qestion de l'exercice du jury.`
Supposons $m \in A$, avec $m \neq 2$. On va montrer par récurrence que $\mathbb{N}$ que $m + 2k \in A$
`Il faut être plus précis, les élèves seraient perdus.`
...
`Est-ce que vous pouvez écrire précisément ce que vous avez démontré en matière de propriétés, de raisonnements, en écrivant` $\mathcal{P}(k)$.
...
`Est-ce qu'on peut rédiger le début de la récurrence ?`

3. `Est-ce qu'on peut éviter la récurrence pour la question 2) ?`

4. `Passons à la question 3) de l'exercice du jury.`

Un candidat candidat :

1. `En quelle classe le raisonnement par récurrence est-il introduit ?`

2. Le deuxième exercice du candidat propose de montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $n^3 - n = 0$ (3).
`Qu'est-ce qui se passe si on remplace 3 par 5 dans cet exercice ?`
Quelques calculs plus loin : on a la même égalité.
`Et si on prend` p `premier ?`

3. `Vous avez parlé du raisonnement par contraposition, qu'est-ce que c'est ?`
C'est utiliser que $P \Rightarrow Q$ est équivalent à $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
`Quel est le lien avec le raisonement par l'absurde ?`

4. On demande au candidat de résoudre les questions 2) et 3) de l'exercice du jury. Pour résoudre la troisième question, le candidat construit une suite (p_n) d'éléments de A. Il dit que comme A est fini, on aboutit à une contradiction.
`Si` (p_n) `est une suite, alors l'ensemble` $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ `est infini ?`
Non.
`Alors qu'est-ce qu'il faut vérifier en plus ici ?`

5. `Parlons un peu des implications. L'implication "`3` est premier" ⇒ "`$4 = 4$`"
est-elle vraie ?`
Euh...oui.
`Et l'implication "`4` est premier" ⇒ "`$4 = 4$`" ?`
Je ne vois pas.
`D'accord, comment définir une implication ?`
...
`Par exemple, est-ce que l'implication "Si la porte est ouverte je vois s'il y a quelqu'un" est vraie, même s'il n'y a personne et que la porte est fermée ?` (rires)
Je dirais oui...
`Donc on peut avoir des propositions fausses, avec des implications entre elles. Est-ce que vous pouvez décrire l'implication à l'aide d'une table de vérités ?`

Dossier du 3 juillet 2007

1. Je propose de changer la lettre car pour les élèves la lettre x est une inconnue.
`La lettre` x `n'est-elle pour les élèves qu'une inconnue ?`
En probabilités, on l'utilise aussi par exemple pour désigner l'espérance $E(X)$.
`Et pour autre chose ?`
...
`Et par exemple quand on écrit` $f(x)$ `ou` $g(x, y)$ `?`

2. Le calcul me montre que la fonction $g : x \mapsto x\ln(x) - x$ n'est une primitive que sur $]1, +\infty[$.
En posant $X = 1/x$, et en faisant le même calcul, on trouve un résultat analogue.
`Mais n'y a t-il pas un moyen plus simple ?`
...
`Regardez alors l'ensemble de définition de la fonction.`
Oui cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc il suffit de la dériver et de constater que la fonction dérivée est la fonction ln.

3. `Peut-on alors encore appeler cette fonction` g `?`

4. Concernant un des exercices du candidat, le jury demande `Quelle est la définition de l'intégrale de` a `à` b `d'une fonction ?`
Si f est une fonction continue et dérivable sur un intervalle $[a, b]$...
`Pourquoi prenez vous une fonction dérivable sur` $[a, b]$ `et non seulement continue ?`
...
`Pouvez-vous rappeler le lien entre continuité et dérivabilité ?`

♣ Dans la première question de l'énoncé de l'exercice du jury, la fonction est prise continue et strictement croissante. Pourquoi ?
♣ Qu'est-il dit à ce propos dans les programmes ?

Dossier du 5 juillet 2007 - Divers types de raisonnements (par l'absurde, par récurrence).

1. `Pouvez-vous résoudre la deuxième question de l'exercice jury ?`

2. `Pouvez-vous résoudre votre premier exercice ?`

3. `Quel est le lien entre la parité et les congruences ?`

Dossier du 12 juillet 2007 : Outils - les transformations.

La candidate commence par répondre aux questions du jury : elle montre comment utiliser la calculatrice, puis résoud le problême à l'aide des nombres complexes. Elle montre que l'affixe du trésor ne dépend que de celles du vieux chêne et de la barque. Il y pourtant une erreur dans sa formule. Elle propose de donner l'exercice de Terminale suivant après avoir fait chercher aux élèves l'exercice du jury :

On se place dans le plan complexe $(0, \vec{u}, \vec{v})$. On note B, C, P_0, P_1, P_2 et T les points du plan complexe correspondant respectivement à la vieille barque, au chêne, à la potence, au premier piqué planté, au second piqué planté, et au trésor. On note ègalement $z_B, z_C, z_{P_0}, z_{P_1}, z_{P_2}$ et z_T leurs affixes respectives.
1) a) Montrer que P_1 est l'image de P_0 par une rotation dont on précisera l'angle et le centre.
2) b) En déduire une expression de z_{P_1} en fonction de z_{P_0} et z_0.
2) Par un raisonnement analogue, en déduire un raisonnement de z_{P_2} en fonction de z_{P_0} et z_B.
3) Montrer en utilisant les questions précédentes que $z_T = \frac{1-i}{2}(z_C + z_B)$. Que peut-on dire de la position du point T lorsqu'on fait bouger P_0 ?
4) Conclure : Paul a-t-il réellement eu de la chance ?

Enfin la candidate propose deux exercices. Le premier consiste, étand donné une droite du plan d et deux points A et B situés dans le même demi-plan que cette droite, construire les points M et N sur d distants d'une longueur h et qui minimisent la longueur de la ligne brisée $AMND$. Dans le deuxème exercice, on considère un tétraèdre $ABCD$. Il s'agit de montrer que le plan IJK est parallèle au plan BCD si on note I, J et K les centres de gravité respectifs des triangles ABC, ACD et ABD.

.

1. `Est-ce qu'il n'y aurait pas une erreur dans la formule de l'affixe ?`
...ah oui.
`Est-ce que vous pouvez refaire le calcul ?`
La candidate s'exécute.
`Est-ce que cela change votre conclusion ?`

2. `Est-ce qu'on peut reconsidérer la première question de votre énoncé ?`
...
`Cette rotation est-elle unique ?`
Non !
`Comment corriger l'énoncé alors ?`

3. `Est-ce qu'on peut résoudre l'exercice plus géométriquement ?`
Oui.
`Par exemple, comment construire le point` T `représentant le trésor avec la formule obtenue donnant son affixe, et en utilisant les transformations ?`

4. `Est-ce qu'on peut résoudre votre premier exercice ?`

Exposé du 14 juillet 2007 - Probabilités.

Laissons la parole au candidat qui livre la vision[4] qu'il a gardé de sa préparation et des vingt premières minutes.

L'exercice est tout bête, une urne avec des boules, et on peut le résoudre avec un arbre...en trente secondes ! J'ai alors bien conscience (surtout après avoir lu un rapport de jury sur un sujet du même type...) qu'ils vont me demander de justifier quelques propriétés des arbres et donc je prends mes précautions pendant le temps de préparation.
J'arrive donc devant mon jury, je fais une petite introduction historique sur les probabilités, et sur l'arrivée des urnes au XVIIIème avec ce bon vieux Jacob Bernoulli : je parle alors de l'exercice ! Je réalise l'arbre, après avoir dessiné l'urne, ayant expliqué chaque cas de figure comme si je faisais un arbre à des élèves pour la première fois... Je leur rappelle au passage qu'il est stipulé dans les programmes de Terminale S qu'un arbre bien construit a valeur de preuve et je leur cite les trois principales propriétés des arbres de probabilités avec l'espoir et l'intime conviction qu'ils me demanderont ce qu'il y a de caché derrière... Je leur présente mes deux exercices sur le (large) thème des "probabilités" :
- dans le premier, il s'agit de calculer les probabilités d'obtenir les différentes mains au poker (quinte flush, quinte, full, double paire, etc...). On utilise en effet le dénombrement et apparaissent des distinctions à faire au niveau des hiérarchies.
- dans le deuxième, on étudie la durée de vie d'un composant electronique. L'exercice est lié à la physique, aux variables aléatoires continues, à la durée de vie sans vieillissement. J'explique que ça ne marche pas avec les êtres humains...
Je conclus mon exposé en parlant du lien avec les statistiques, de la place des probabilités dans les programmes actuels et à venir (en évoquant le socle commun).

1. `Pouvez-vous justifier les propriétés de l'arbre ?`
J'utilise la formule des probabilités totales...
`Pouvez-vous l'écrire et la démontrer ?`

2. `Dans le premier exercice que vous proposez, quelle est la probabilité d'obtenir un full` [5] `?`
L'univers a pour cardinal $\binom{52}{5}$; on choisit une valeur pour la paire parmi 13, et une pour le brelan parmi 12 ; enfin on choisit pour la paire 2 cartes parmi 4, pour le brelan 3 parmi 4. On trouve donc une probabilité de $\frac{13.12.\binom{4}{2}.\binom{4}{3}}{\binom{52}{5}}$.
`Moi j'aurais plutôt répondu :` $\frac{\binom{2}{13}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{3}}{\binom{52}{5}}$.
Euh... il faudrait peut-être reprendre ce raisonnement...
`En effet, il y a une erreur...c'est fait exprès...parfois on est vicieux au jury !`
`Parle pour toi !` (rires)
`Alors, est-ce que vous pouvez nous expliquer cette erreur ?`

[4] Gardons en tête qu'il s'agit de l'interprétation du candidat.

[5] rappelons qu'on considère une main de 5 cartes parmi 52. Un full, c'est un brelan et une paire, soit trois cartes d'une même valeur, et deux cartes d'une même valeur, les deux valeurs considérées étant diffèrentes.

3. `Est-ce qu'il y a une autre notion au programme qui n'apparaît pas dans vos exercices ?`

...

`Par exemple, dans votre premier exercice si on associait des gains à chacune des mains possibles, ou si dans le deuxième exercice on se posait la question de la durée de vie moyenne ?`

Il ne s'agit pas dans ce qui suit du souvenir d'un oral, mais des questions posées sur plusieurs oraux, et dont se souvient un témoin.

1. `Comment construit-on ou utilise-t-on un arbre de probabilités ?`

2. `Vous êtes certaine que votre formule est la formule de Bayes ?`

3. `Vous parlez d'indépendance et d'incompatibilité sans différenciation. C'est la même chose pour vous ?`

...

`Quelle est la définition d'incompatibilité ?`

4. Le candidat propose un exercice : dans une classe de 26 élèves, 12 ont pour deuxième langue l'espagnol. On choisit avec équiprobabilité deux élèves. On demande alors de calculer la probabilité qu'aucun des deux ne parle espagnol.

`Quel est l'univers dans votre exercice ?`

Les élèves.

`Et dans l'exercice du jury ?`

$1, 2, 3, 4$. Non...si : $1, 2, 3, 4$.

`Certaine ?`

♣ Quel rôle faire jouer au tableur dans l'enseignement au lycée ?

Dossier du 19 juillet 2007 - Séries statistiques à deux variables.

1. `La droite de regression est-elle unique ?`
   Je pense que non.
   `Alors donnez-nous une autre droite, de même ajustement affine.`
   La candidate trace alors une droite perpendiculaire à la première.
   `Euh...`
   Ô mon Dieu !

2. `Quelle est la droite de Meyer ?`
   ...
   `Pouvez-vous redémontrer la formule donnant l'équation de la droite de régression linéaire ?`
   ...
   `Quelle est sa pente ?`
   ...
   `Quelles sont les coordonnées du point moyen ?`

3. `Vous avait travaillé avec un repère orthonormal. Pourquoi ?`

   `Est-ce indispensable, est-ce qu'il y a un lien avec la droite de régression linéaire ?`

Dossier du 20 juillet 2007 - Divers types de raisonements (par l'absurde, par récurrence,...).

1. `Pouvez-vous résoudre la deuxième question de l'exercice jury ?`
...
`Est-ce que vous pouvez l'écrire très proprement ?`

2. `Quelle est l'idée pour résoudre la troisième question de l'exercice du jury ?`
On peut faire un raisonement par contraposition.

`Est-ce que pouvez le faire ?`
...Ah, non, on ne peut pas le faire finalement.
`Est-ce que vous pouvez nous expliquer pourquoi ?`

3. `Essayez de résoudre le deuxième exercice que vous proposez.`
Je vais utiliser une récurrence...
`Est-ce que vous pouvez nous expliquer le principe ?`

4. `Quelles sont les valeurs logiques des raisonnements par contraposition, l'absurde et par équivalence ?`

5. `Est-ce qu'il existe d'autres raisonnements ?`
Oui, par analyse et synthèse.
`Pouvez-vous nous l'expliquer ?`

Dossier du 2 Juillet 2008

Un candidat 2008 nous rapporte une liste de questions posées à 5 candidats concernant ce dossier du 2 Juillet. Nous ne restituons donc pas ici l'enchaînement des questions lors d'un oral.

1. Pouvez-vous montrer que la loi exponentielle est une loi sans vieillissement ?

2. Est-ce que l'on écrit en Terminale $\int_{t+h}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$?

3. Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ?

4. Qu'est-ce qu'une loi binomiale ?

5. Si X est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernouilli de paramètres 10 et p, comment expliquer à un élève qui répond que $P(X = 4) = p^4(1-p)^6$?

6. Quelles relations connaissez-vous entre probabilités conditionnelles et indépendance ?

...

D'abord, qu'est-ce qu'une probabilité ?

7. Pouvez-vous démontrer que $P(A - B) = P(A) - P(B)$?

8. Pouvez-vous nous donner le triangle de Pascal ?

9. Comment écrivez-vous récurrence ?

Dossier du 3 Juillet 2008

1. `Pouvez-vous nous donner votre réponse à la question 1 ?`

2. `Qu'est-ce qui justifie que` $s(A) = s(B)$`, sans refaire le calcul ?`

3. `Pouvez-vous nous donner votre réponse à la question 2 ?`
Le candidat répond.
`Pouvez-vous nous donner votre réponse à la question 3 ?`
Le candidat donne la réponse...
`Pouvez-vous nous donner votre réponse à la question 4 ?`

4. `Est-ce que vous avez une formule pour calculer l'aire d'un triangle isocèle d'angle au sommet` α`, et dont les côtés égaux aient pour longueur` a `?`

5. `Peut-on résoudre l'exercice 1 que vous avez proposé ?`

A un deuxième candidat :

1. `Est-il possible d'utiliser Cabri pour faire la somme des deux nombres, et vérifier que` $s(M)$ `est constante ?`

2. `Pouvez-vous nous donner votre réponse à la question 1 ?`
Le candidat donne sa réponse.
`Est-ce qu'on utilise l'angle` AOB `?`

3. `Les données sont` A `et` B `qui appartiennent à` Δ`. Est-ce qu'il n'y a pas d'autres données possibles ?`

4. `Est-ce qu'on peut parler du centre de gravité d'un triangle plat ?`

Encore quelques souvenirs du passage d'un candidat 2008 :

1. `Quelle est la définition de la distance d'un point à une droite ?`
C'est le plus court chemin du point à cette droite.
`Est-ce que vous pouvez montrer le lien avec le projeté orthogonal ?`

2. `Quel est l'intérêt de l'outil de géométrie dynamique de la calculatrice ?`
...
`Est-ce qu'on peut voir ce qui se passe si` A `se confond avec` O `?`
...
`...si on déplace le point` A `?`
...
`...et quand on change l'angle ?`

3. `Pouvez-vous nous donner votre réponse à la question 2) ? A la question 3) ?`
...
`Peut-on penser à la question 1) ?`

4. `Quel est votre réponse à la question 4) ?`
Je n'ai pas réussi à y répondre.
`Alors on va vous guider...`

5. `Quelle est la différence entre homothétie-translation et rotation-symétrie ?`

6. `Comment pourrait-on concevoir un problème de lieu avec les complexes ?`

Voici regroupées des questions posées à deux candidats 2008, toujours sur ce dossier.

1. `Est-ce que vous pouvez placer autrement le point` B `?`
...
`Qu'est-ce que la calculatrice apporte dans cet exercice ?`
...
Que se passe-t-il si on change la valeur de $\frac{\pi}{4}$?

2. Qu'obtenez-vous pour OA ?
$\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{8})\cos(\frac{\pi}{8})}$.
Pouvez-vous simplifier ?

3. Vous avez dit que $A'B'$ est le symétrique de AB par la symétrie de centre O. Pouvez-vous montrer la même chose pour $A'B$ et AB' ?

Dossier du 4 Juillet 2008 :

1. `Pouvez-vous nous proposer votre réponse à la question 1) ?`
Le candidat répond.
`A la question 2) ?`
Le candidat explique.
`Est-ce que vous pouvez rédiger la réponse très précisément ?`

2. `Est-ce que vous pouvez énoncer le théorème des valeurs intermédiaires ?`

3. `Dans quel contexte l'exercice est-il approprié ?`

A un autre candidat 2008 :

1. Que pouvez-vous nous dire de plus sur F ?
...
F est-elle dérivable ?
Le candidat répond.
Quelles sont les variations de F ?
Le candidat répond.
Et la parité de F ?

2. Quelle est la limite de F en $+\infty$?

On regroupe dans ce qui suit les questions posées à trois candidats :

1. Pour répondre à la question Q1 vous proposez la fonction $g(x) = \ln(x) - kx^2$.
Est-ce qu'on peut voir les choses d'une autre façon ?
...
Par exemple si je cherche a tel que $g(a) = 0$?
...
Est-ce que vous pouvez déterminer le nombre de solutions suivant les valeurs de k ?
Le candidat propose quelque chose.
Alors est-ce qu'il y a une fonction qui englobe tous les résultats ?

2. Est-ce que vous pouvez factoriser $P(x) = x^3 - 12x + 16$, en remarquant que $P(2) = 0$?

3. Est-ce qu'on peut faire résoudre les trinômes du second degré en classe de seconde ?

4. Comment justifier que F est dérivable ?

5. Quelle précaution faut-il prendre pour l'utilisation de la calculatrice ?
...
A quoi faut-il faire attention ?
...
Peut-on trouver une valeur approchée du maximum à l'aide de la calculatrice ?

Dossier du 12 juillet 2008

1. `Par rapport à la dernière question, comment calculer` $F(2)$ `?`
Le problème revient à trouver x tel que $u(x) = 2$.
`C'est une équation ; avez-vous essayé de la résoudre ?`
Non.
`Alors on va le faire...`

2. Le candidat a proposé comme premier exercice la calcul de $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. Ce calcul est guidé : il est ainsi proposé de dériver la fonction $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$...
`...mais après. Regardons l'exercice que vous proposez. L'objectif de votre exercice est de calculer l'intégrale` $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. `Est-ce que votre exercice ne ressemble pas beaucoup à celui proposé par le jury ?`
...
`Est-ce que votre exercice ne donne finalement pas la solution de l'exercice jury ?`

3. `Alors revenons à l'exercice jury, et reprenons le calcul de` $u(2)$.
Il faut résoudre $e^x - e^{-x} = 4$.
`C'est typiquement un exercice qu'on peut poser en Terminale S, dans le chapitre exponentiel ?`
...
`Que vaut` e^{-x} `?`
$\frac{1}{e^x}$. Ah oui, on pose $X = e^x$, on a $X - \frac{1}{X} = 4$. On multiplie par $X > 0$... (le candidat finit les calculs)
`Bon, alors est-ce que 2 est particulier ? Ne pouvait-on pas le remplacer par un réel` a `?`
Comme solutions de l'équation du second degré, on va trouver $X_1 = a - \sqrt{a^2+1}$ et $X_2 = a + \sqrt{a^2+1}$.
`Laquelle choisit-on ?`
X_2, car $X_1 < 0$.
`Pourquoi ?`

4. `Donc on peut toujours résoudre` $u(x) = a$. `Qu'en déduire ?`

5. Le candidat a énoncé le théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si pour tout $x \in I$ on a $f'x) \geq 0$, alors f est croissante. Il dit qu'il est donné en Première S.
`Est-ce qu'on le démontre en Première ?`
En utilisant le fait que $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$...mmm...
`Bon, qu'est-ce que vous avez envie de dire ?`
...
`Et est-ce qu'on peut montrer la réciproque ?`

...
`Et sinon que peut-on faire en dehors du lycée ?`

6. `Revenons au thème : calcul d'intégrales par des méthodes variées. Combien en proposez-vous ?`
Calcul de primitive, intégration par parties.
`Une troisième ?`
...
`Par exemple, comment calculer` $\int_0^3 \frac{x}{2x+3}dx$ `en Terminale S ?`
...
`La fonction sous le signe intégrale fait-elle partie d'une famille particulière ?`
Une fraction rationnelle.
`Alors, ça devrait déclencher un réflexe !`
La décomposition en éléments simples !

7. `Comment calculer` $\int_0^1 \sin^3(x)dx$ `?`
On écrit $\sin^3(x) = \sin^2(x)\sin(x)$.
`Et puis ?`
On utilise $\sin^2(x) = 1 - \sin(x)$. Puis on peut calculer la primitive.
`D'accord, mais si on doit calculer` $\int_0^1 \sin^4(x)dx$ `?`
On peut linéariser.

Un autre candidat sur ce même dossier.

1. `Pouvez-vous rédiger la question 2.a) de l'exercice jury comme vous le feriez devant une classe de Terminale S ?`
On peut considérer $F \circ u$...
`Pourquoi` $F \circ u$ `est définie ?`
Un autre membre du jury : `Ah mais il l'a expliqué...`

2. `Est-ce qu'on peut préciser pourquoi` $u(x) \in \mathbb{R}^+$ `?`

3. Le candidat a dit que si $(F \circ u)' = 1$ alors $(F \circ u)(x) = x + C$.
`Que manque-t-il ici ?`
...
`J'aide : si on considère une fonction qui vaut` -1 `sur` $\mathbb{R}^-$`,` 1 `sur` $\mathbb{R}^+$ `et qui s'annule en` 0 `?`
Elle n'est pas dérivable partout !
`Ok...alors ne la considèrons que sur` $\mathbb{R}^*$ `?`
...
`La fonction que je vous ai donnée est bien dérivable sur son ensemble de définition, et pourtant non constante ?`
...
`Qu'est-ce qui change par rapport à votre exemple ?`

4. `Est-ce qu'on peut traiter la dernière question de l'exercice jury ?`
Le candidat dit que cela revient à résoudre $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2$. il résoud l'équation puis dit : la solution équivaut à $x = \ln(\sqrt{5}+2)$.
`Ce n'est pas correct.`
...
`Qu'utilisez-vous ?`
Ce qui précède.
`Ce n'est pas ça.`
Ah oui, il faut l'équivalence.

5. Qu'est-ce qui vous donne l'idée d'introduire $u(x)$?
On connaît la fonction F
`C'est logique ?`
Vu que u c'est sh.

6. `Vous avez dit : pour calculer une intégrale, il faut connaître une primitive.`
`On ne peut pas sans primitive ?`
...
`Vous pouvez calculer` $\int_{-1}^{1} \frac{\sin(x)dx}{e^x + e^{-x} + e^{x^2}}$ `?`
...
`Est-ce qu'on ne peut pas la calculer sans primitive ?`
...
`Quelle sont les propriétés de la fonction` sin `?`
La périodicité.
`Oui...et...`
Elle est impaire.
`Et alors, est-ce que ça ne donne pas une idée pour calculer notre intégrale ?`
Ah oui...elle est impaire aussi, et donc l'intégrale est nulle.
`Finalement, est-ce qu'il faut connaître une primitive pour calculer une intégrale ?`

7. Le deuxième exercice proposé par le candidat consiste à calculer $\int_1^x \ln(t)dt$ en proposant une intégration par parties.
`Quel est le lien entre votre exercice et l'exercice jury ?`

8. `Reprenons le calcul de` F. `Vous avez cherché les solutions de l'équation` $Y^2 + 2XY - 1 = 0$. `De quels signes étaient ces solutions ?`
Une solution négative, et une positive.
`Comment le savoir sans calculer les solutions ?`

Un troisième candidat sur ce dossier :

1. Les exercices du candidat varient les méthodes pour calculer des intégrales. Dans le premier, on utilise le calcul de primitives. Dans le deuxième, on utilise l'intégration par parties. Dans le troisième, on utilise le calcul d'aires.
Est-ce que vous pouvez donner le résultat de votre exercice 3 ?

2. Vous nous avez dit que si f admet une primitive F, alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Comment définir l'intégrale alors ?
Avec l'aire.
D'accord. Et comment faire le lien avec l'égalité que vous avez donné alors ? Dans les grandes lignes.
Par exemple je vais prendre f croissante et positive. J'encadre alors $F(a+h) - F(a)$...
Vous ne pouvez pas l'appeler F pour l'instant !
En effet...appelons là S.
Bon, mais alors quelle propriété de S allez-vous utiliser de façon implicite ?
L'additivité.
Comment ça s'énonce ?
...
En général, avec des domaines du plan ?

3. Dans la méthode que vous présentez pour le calcul de $F(2)$, vous éliminez une des deux racines. Comment le justifier ?
Elle est négative.
Peut-on le prévoir sans le calcul des racines ?
...
Par exemple, combien de solutions a $u(x) = 2$?
En Terminale S ?
Euh...oui par exemple. Avec quels outils ?
...
u est parfois notée f en Terminale.
Ah oui, avec le théorème des valeurs intermédiaires. Elle est strictement croissante, donc réaliser une bijection...
Qu'est-ce qui manque comme hypothèse sur votre fonction f ?
La continuité.

Encore un candidat...

1. Est-ce que vous pouvez répondre à la question Q2 au tableau, en rédigeant comme vous le feriez devant une classe ?

2. Vous dites que vous n'avez pas réussi à résoudre $u(x) = 2$.
Oui, il n'y a pas sh en Terminale.
Mais comment faire autrement ?
Avec le théorème des valeurs intermédiaires, on peut montrer l'existence par exemple.
Qu'est-ce qui vous manque alors ?
La stricte croissance : ici elle est juste croissante.

`Ah ?`
Si, elle est strictement croissante.
`Est-ce que vous pouvez le rédiger bien comme une classe de Terminale S ?`
On a $u(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, je dérive.
`Est-ce nécessaire ?`
Oui, pour montrer la stricte croissance.
`Une autre méthode. Regarder juste l'expression.`
Le candidat trouve, puis poursuit : u est strictement croissante, on a $u(0) = 0$ et $u(2) > 3,6$.
`Comment le savez-vous ?`
Avec la calculatrice. Alors il existe k tel que...
`Ecrivez le très proprement au tableau...`

3. `Revenons sur ce` $u(2) > 3,6$. `Comment conclure sans utiliser la calculatrice ?`
...
`Une autre méthode, sans évaluer en un point ?`
...
`Quelle est l'image de` $\mathbb{R}^+$ `par` u `?`
Ah oui, la limite de u en $+\infty$ est $+\infty$!
`D'accord : pouvez-vous rédiger très proprement avec cet argument ?`
Le candidat écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} - \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{2} = +\infty$.

4. `Est-ce que vous pouvez définir` $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$?
Soit $M > 0$. $\forall x_0 \in [0, +\infty[,\ \exists x_0 \in [x_0, +\infty[\ |\ |u(x)| \geq M$.
`Avec cette définition, est-ce que` $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin(x) = +\infty$ `?`

5. `Est-ce qu'on peut reprendre la résolution de` $u(x) = 2$ `?`
Il n'y a pas *sh* en Terminale S.
`Ecrivez ce que veut dire` $u(x) = 2$.

6. `Dans les exercices que vous proposez, vous traitez l'intégration par parties.`
`Est-ce qu'il n'y a pas encore une autre méthode ?`
L'approximation par les aires ?
`Est-ce qu'il n'y a que des approximations par les aires ?`

Dossier du 14 Juillet 2008

Le candidat a proposé deux exercices : le premier porte sur la loi uniforme, le second sur les probabilités conditionnelles.

1. `Est-ce que vous pouvez corriger la troisième question en modélisant l'épreuve.`
...
`Pouvez-vous préciser l'espace probabilisé` $(E, \mathcal{P}(E), p)$ `?`
D'après le candidat, on passe un temps long à donner une réponse précise.

2. `Pouvez-vous corriger votre premier exercice ?`

3. `Pouvez-vous corriger votre deuxième exercice ?`

Dossier du 15 Juillet 2008

1. L'un des exercices proposés par la candidate propose la réalistaion du patron d'un cube.
`Vous proposez la contruction d'un patron d'un cube. Cet exercice est relativement simple, je vous propose de l'étoffer un peu. Pouvez vous nous présenter la construction d'un patron d'un cube surmonté d'une pyramide, comme si nous étions une sympathique classe de sixième ?`

2. `Quelles sont les deux propriétés fondamentales des homothéties ?`
Elles conservent l'alignement des points, le parallélisme, et les centres.

3. Deux des exercices proposés par la candidate utilisent les homothéties.
`Soit` O, U `et` A `des points alignés, et` M `un autre point de l'espace, non aligné avec les premiers. Pouvez vous nous construire` M', `image de` M `par l'homothétie qui transforme` U `en` A `?`

4. `Soit` $[AB]$ `un segment,` A' `et` B' `des points de ce segment. Construire le centre de l'homothétie qui transforme` A `en` A' `et` B `en` B'.