Feuille 1 : Probabilités, probabilités sur un ensemble fini, dénombrement.

Master Enseignement Mathématiques - Probabilités et statistiques.

Points de cours fondamentaux

▶ définition du supérieur d'une tribu, d'une probabilité
▶ définition de probabilité pouvant être donnée au collège
▶ définition de loi (ou distribution) de probabilité au lycée
▶ propriétés élémentaires vérifiées par une probabilité
▶ maîtriser les dénombrements élémentaires (nombre de parties d'un ensemble fini, nombre d'applications entre deux ensembles finis, cardinal d'un produit cartésien, listes, arrangements, combinaisons, nombre d'applications injectives, de permutations)
▶ évènements indépendants deux à deux, évènements mutuellement indépendants

---

`Exercice 1.` *Définition(s) d'une probabilité. Premier regard sur les programmes.*
1. Rappeler une définition de *tribu* et de *probabilité* que l'on donne généralement dans le supérieur.
2. Donner les deux définitions de *probabilité* utilisées dans les manuels de troisième *Sesamaths* et *Le livre scolaire*, que l'on pourra trouver en ligne.
3. Quel point du programme de Cycle 4 justifie la définition choisie dans le manuel *Sesamath* de la classe de Troisième ?
4. Comment le programme de Seconde demande-t-il de définir la probabilité d'un évènement A ? (Citer l'extrait des programmes.) Proposer une définition de loi -ou de distribution- de probabilités et de probabilité d'un évènement tiré d'un manuel de Seconde.
5. En un ou deux mots, quel est le cadre de ces définitions de Seconde ? Trouve-t-on dans les programmes de lycée une définition du terme *probabilité* dans les autres cadres du lycée (cadre discret ou cadre continu) ?
6. Enoncer et démontrer la relation $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ dans le cadre d'une classe de Seconde (on peut s'inspirer des manuels).
7. Proposer une autre démonstration de cette même relation comme on le fait plus généralement dans le supérieur dans un cadre plus général.
8. Proposer un énoncé propre donnant la probabilité $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ dans le cas où les évènements A_i sont deux à deux disjoints. Le démontrer proprement dans le cadre du lycée. Démontre-t-on cette égalité dans le cadre du supérieur ?

Rappel : on trouve officiellement les programmes au Bulletin Ofiiciel (on dit BO), via le site EDUSCOL.

C'est cependant un vrai labyrinthe, et la rubrique *Enseigner* du site `https://euler.ac-versailles.fr/` peut sembler plus commode pour trouver les programmes de Mathématiques de façon organisée.

`Exercice 2.`

1. A la loterie nationale, on tire 7 boules numérotées entre 1 et 49. Une personne joue une grille. Quelle est la probabilité de gagner, c'est-à-dire d'avoir les 7 bons numéros ? Quelle est la probabilité d'avoir au moins 5 bons numéros ?

2. Au tiercé, on doit trouver les 3 premiers chevaux à terminer une course de 12 chevaux. En jouant au hasard, quelle est la probabilité d'avoir le tiercé dans l'ordre ? Sans tenir compte de l'ordre ?

3. Compter les anagrammes du mot $MATHS$ (on ne s'intéresse pas au fait que les anagrammes constitués aient un sens ou pas). Même chose avec les mots $KOLMOGOROV$ et $PROBABILITES$.

4. Quelle est la probabilité de gagner à l'Euromillion, sachant que l'on tire 5 boules numérotées entre 1 et 50 puis deux boules (dites étoilées) numérotées entre 1 et 12 ?

5. On répond à un QCM proposant 5 réponses possibles pour chacune des 18 questions. En répondant au hasard, quelle est la probabilité d'obtenir au moins une bonne réponse ? Au moins 17 bonnes réponses ?

`Exercice 3.` *Dénombrements classiques présents dans les manuels de lycée.*
On extrait simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes, ce que l'on appelle *une main*. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1. un carré,
2. deux paires distinctes,
3. un full (c'est-à-dire 3 cartes d'une même valeur, et deux cartes d'une même valeur),
4. un brelan (c'est-à-dire 3 cartes d'une même valeur, sans full ni carré) et
5. une quinte flush (c'est-à-dire 5 cartes d'une même couleur, se suivant dans l'ordre).

Il s'agit d'une situation très classique de dénombrement, présente dans les manuels (ci-dessous, des extraits des manuels de Terminale Spécialité *Variations* à gauche et *Le Livre Scolaire* à droite) .

`Exercice 4.` Un mille-pattes dispose de vingt et une paires de bottes identiques. Il les prend au hasard pour les enfiler sur chacune de ses quarante deux pattes sans tenir compte de la nature de la botte. Combien a-t-il de manières différentes d'être chaussé ? (On rappelle qu'une paire de bottes est constituée d'une botte droite et d'une botte gauche.)

`Exercice 5.` On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Les évènements *tirer un trèfle* et *tirer un as* sont-ils indépendants ?

`Exercice 6.` On considère des entiers n, r et s tels que $1 \leq r \leq s \leq n$. Dans une population de n individus, on prélève sans remise un échantillon de cardinal r, puis à partir de la même population de n individus on prélève un échantillon de cardinal s. Quelle est la probabilité que les deux échantillons n'aient aucun élément en commun ?

`Exercice 7.` On considère un entier $k \geq 1$. On suppose que k personnes se retrouvent à une même soirée. Excluant la possibilité d'un anniversaire le 29 février, quelle est la probabilité que deux personnes au moins aient leur anniversaire le même jour ? Déterminer la plus petite valeur de k pour que cette probabilité soit supérieure à $1/2$.

`Exercice 8.` On lance n boules sur une surface percée de n trous (chacun pouvant éventuellement contenir les n boules). Quelle est la probabilité des évènements :
- A_1 : *il y a une boule par trou*
- A_2 : *il y a deux boules dans un trou, les $n-2$ autres sont dans $n-2$ trous distincts.*

`Exercice 9.` Dans une association de 24 personnes, on doit former un comité de 5 membres. Mais les statuts de l'association interdisent que deux conjoints fassent simultanément parti du comité. Combien peut-on former de comités, sachant que l'association compte un seul couple parmi ses membres ?

`Exercice 10.` On appelle diagonale d'un polygone convexe tout segment joignant deux de ses sommets non consécutifs. Quels sont les polygones qui ont autant de diagonales que de côtés ?

`Exercice 11.` *Tiré d'une évaluation du M1 2021-22*
Dans un groupe il y a 10 hommes, 8 femmes et 7 enfants. De combien de manières différentes peut-on les placer sur une ligne si :
1. ils peuvent se placer librement ?
2. les hommes désirent rester groupés ?

`Exercice 12.` *Combinaisons avec répétitions.* On considère deux entiers strictement positifs n et p, et un ensemble X de cardinal n. On s'intéresse au nombre K_n^p de façons de choisir p éléments de X sans tenir compte de l'ordre, et en autorisant des répétitions (autoriser les répétitions est ce qui va distinguer du nombre de combinaisons $\binom{n}{p}$).
1. Montrer que K_n^p est également le nombre de solutions de l'équation $x_1 + \ldots + x_n = p$ dans $\mathbb{N}^n$ (on poura expliciter une bijection entre deux ensembles).
2. Montrer que $K_n^p = \binom{n+p-1}{p}$.
3. De combien de façons peut-on répartir 50 pièces de 1 euro entre 10 personnes ? (On ne discerne pas les pièces.)
4. Dix personnes se partagent 50 chocolats différents les uns des autres. Combien y a-t-il de répartitions possibles ?

Après les nombres de permutations, de listes, d'arrangements et de combinaisons, le nombre de combinaison avec répétitions est un outil utile qui intervient naturellement lors de nombreuses situations combinatoires. Ce point apparaît comme approfondissement possible dans les programmes, et donc dans les manuels sous forme d'exercices. On pourra s'inspirer de l'exercice suivant proposé dans le manuel *Variations* de *Terminale*.

`Exercice 13.` *Tiré d'une évaluation du M1 2021-22*
Une société fabrique des yaourts aux fruits avec dix parfums différents. Le directeur des ventes propose de constituer des lots de quatre pots de parfums tous différents.

1. Combien de lots distincts peut-on former de cette façon ?

2. Combien de lots distincts peut-on former de cette façon sachant qu'ils ne doivent pas contenir simultanément un pot à la fraise et un pot à la framboise ?

3. Le service commercial a abandonné cette idée. Désormais il souhaite des lots de quatre pots avec quatre parfums quelconques, c'est-à-dire non nécessairement tous différents. Combien de lots distincts peut-on former de cette façon ?

`Exercice 14.` *Problème court type épreuve 2.*

CAPES 2018

Thème : probabilités

L'exercice

On choisit au hasard un nombre entier de 0 à 999.
Quelle est la probabilité qu'au moins un de ses chiffres soit strictement supérieur à 5 ?

Les réponses de trois élèves de première scientifique

Élève 1

Il y a 1000 *nombres entre* 0 *et* 999. *Les nombres cherchés sont constitués des chiffres* 6, 7, 8 *et* 9, *ce qui fait quatre possibilités.*
Pour un nombre à trois chiffres, il y en a donc : $4 \times 4 \times 4 = 64$. *Autrement dit,* 64 *nombres parmi* 1000.
La probabilité cherchée est donc $\dfrac{64}{1000}$ *ou* $\dfrac{8}{25}$.

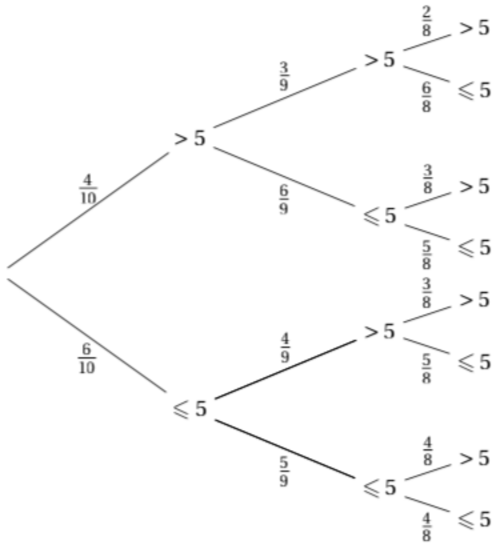
Élève 2

Je vais chercher à dénombrer les nombres qui n'ont pas la propriété demandée.
Parmi les 1000 *nombres considérés, il s'agit des nombres dont les chiffres sont* 0, 1, 2, 3, 4 *ou* 5.
Il y a donc 0 (*ou* 000) *et les nombres formés d'un chiffre entre* 1 *et* 5 *suivi de un ou deux chiffres entre* 0 *et* 5.
Il y en a donc $1 + 5 \times (6^1 + 6^2) = 211$.
La probabilité cherchée est donc $1 - \dfrac{211}{1000} = \dfrac{789}{1000}$.

Élève 3

Il y a 4 chances sur 10 que le premier chiffre soit plus grand que 5 et 6 chances sur 10 qu'il ne le soit pas.
J'ai construit l'arbre ci-contre.
Je trouve donc une probabilité de :

$$1 - \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{6}$$



1. Analyser la réponse des trois élèves en mettant en avant acquis et faiblesses.
2. Préciser un accompagnement que vous pourriez apporter à chacun de ces élèves.
3. Proposer une correction de l'exercice telle que vous la feriez devant une classe, sans utiliser la loi binomiale.
4. Proposer une correction de l'exercice telle que vous la feriez devant une classe, en utilisant la loi binomiale.
5. Décrire une aide que pourrait apporter l'outil informatique.
6. Proposer une adaptation de l'exercice pour une classe de Cycle 4 en justifiant.

`Exercice 15.` *Un problème célèbre : la formule du crible ou formule de Poincaré*

On veut démontrer la *formule du crible* : considérant un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, un entier n et n éléments $A_1, \ldots, A_n$ de la tribu $\mathcal{A}$, on a l'égalité suivante :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}\right). \tag{1}$$

1. Pour A et B dans $\mathcal{A}$, montrer que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
2. On fixe un entier n, et on suppose l'égalité (1) vraie pour toute famille de n ensembles dans $\mathcal{A}$. Montrer l'égalité

$$P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}\right).$$

3. En déduire la formule du crible.

4. *Application 1 :* n membres du club Diogène se donnent rendez-vous au bar du club. Chacun d'eux dépose son chapeau au vestiaire en entrant. À la fin de la soirée, chacun des n membres reprend un chapeau au hasard.
4.1. En notant A_i l'évènement *le membre i a son propre chapeau en sortant* montrer que $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$ lorsque les i_j sont des éléments de $\{1, 2, ..., n\}$ deux à deux distincts.
4.2. En déduire en utilisant (1), que la probabilité pour qu'un membre au moins ait son propre chapeau en sortant est

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}.$$

4.3. Comment évolue cette probabilité quand n devient grand ? Justifier précisément.

5. *Application 2 :* Si m et n sont deux entiers strictement positifs, on appelle nombre de Wortpitzky le nombre de façons de colorier m carrés disposés en ligne, avec n couleurs, chaque carré pouvant aussi rester incolore.

Pour la suite on suppose que tout carré est colorié avec une couleur choisie uniformément parmi les $n+1$ possibilités (la dernière possibilité correspondant par exemple au cas *incolore*). Pour tout entier i entre 1 et n on note A_i l'évènement *la couleur i n'est utilisée dans aucun carré.*

5.1. Calculer $P(A_i)$ pour tout entier i entre 1 et n.
5.2. Pour des entiers i, j et k vérifiant $1 \leq i < j < k$ calculer $P(A_i \cup A_j)$ et $P(A_i \cup A_j \cup A_k)$.
5.3. En déduire que $W_{m,n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n+1-k)^m$.

EVALUATION DU 10 OCTOBRE 2022
Durée : 2 h

L'usage des calculatrices et des téléphones est interdit. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent êtres utilisés pour la suite du problème. Il ne faut pas hésiter à traiter les questions dans l'ordre de son choix. Quand ce n'est pas précisé on considère qu'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ correspond aux différentes situations décrites.

Bien lire le sujet et commencer par ce que vous préférez.

Comme d'habitude, on justifiera précisément tout résultat annoncé.

Exercice A

A.1. Démontrer la relation $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$:
- dans le cadre d'une classe de Seconde,
- dans le cadre du supérieur (c'est-à-dire utilisant la définition de probabilités du supérieur).

Expliquer en une phrase ou deux (maximum) ce qui différencie les deux contextes.

A.2. Enoncer puis démontrer un énoncé donnant le cardinal de $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties d'un ensemble fini E.

Exercice B

B.1 Compter, sans tenir compte des accents, les anagrammes du mot $DENOMBREMENT$.

B.2. Un restaurant propose une carte comprenant 17 entrées, 20 plats principaux et 10 desserts. Ces plats sont numérotés de 1 à 47. On prend au hasard trois numéros différents compris entre 1 et 47 : quelle est la probabilité d'obtenir un repas complet, c'est-à-dire une entrée, un plat et un dessert, sans tenir compte de l'ordre ?

B.3 On organise une course entre 12 personnes que l'on considère de même niveau. Trois personnes provenant d'une même ville font partie des participants. Quelle est la probabilité que ces trois personnes se retrouvent parmi les cinq premiers de la course ?

Tourner la page svp.

Exercice C

Une urne contient 50 boules différentes : elles sont numérotées de 1 à 10 et chaque numéro existe une seule fois en chacune des 5 couleurs : rouge, jaune, orange, vert et bleu. On effectue un tirage de 6 boules, sans remise. On suppose les tirages équiprobables.

C.1. Quelle est la probabilité de tirer au moins deux boules jaunes ?
C.2. Quelle est la probabilité de tirer des boules de trois couleurs différentes exactement ?

C.3 Pour aborder l'une des questions précédentes, un élève écrit

On note R pour rouge, J pour jaune, O pour orange, V pour vert, B pour bleu. On a alors $\Omega = \{R_1, R_2, \ldots, R_{10}, J_1, \ldots, J_{10}, O_1, \ldots, O_{10}, V_1, \ldots, V_{10}, B_1, \ldots, B_{10}\}$ *et donc* $Card(\Omega) = 50$.

Proposer quelques explications pouvant l'aider à progresser.

Exercice D

On considère des entiers a, b tels que $a \geq 2$ et $b \geq 2$. On appelle grille un tableau rectangulaire avec a lignes et b colonnes, dont un certain nombre de cases (pouvant être égal à zéro) sont grisées.

D.1. Combien existe-t-il de grilles différentes ?
D.2. Combien existe-t-il de grilles avec exactement deux coins grisés ?
D.3. Combien existe-t-il de grilles avec au plus une case grisée par ligne ?
D.4. Pour cette question uniquement on suppose que $a = b$. Combien compte-t-on de grilles avec exactement une case grisée par ligne et par colonne ?