Feuille 2 : Probabilités conditionnelles - Variables aléatoires finies.

Master Enseignement Mathématiques - Probabilités et statistiques.

Points de cours fondamentaux

▶ définition de probabilité conditionnelle ; lien avec les arbres de probabilités
▶ formule des probabilités totales
▶ théorème de Bayes ; savoir l'utiliser
▶ définition générale d'une variable aléatoire dans le supérieur - définition de variable aléatoire au lycée
▶ manipulation des variables aléatoires ; être à l'aise avec le vocabulaire, les ensembles
▶ variables aléatoires finies - différentes lois : de Bernoulli, binômiale, hypergéométrique
▶ définition d'espérance et de variance, formule de Koenig, espérance et variance des lois classiques ci-dessus
▶ définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire et propriétés
▶ lorsque des v.a X et Y prennent leurs valeurs dans l'ensemble fini $\{1, \ldots, n\}$, savoir décomposer $(X = Y)$, $(X < Y)$, etc. en union disjointe d'évènements plus simples.

`Exercice 1.` *En lien avec les programmes.*
1. Proposer un exercice destiné à une classe de Première, tiré d'un manuel, amenant à l'utilisation d'un arbre pondéré. A quoi correspondent les valeurs marquées sur les branches de l'arbre ?
2. Proposer un exercice destiné à une classe de Première, tiré d'un manuel, amenant à l'utilisation de la formule des probabilités totales. Proposer deux façons différentes d'en rédiger une solution : l'une faisant intervenir explicitement la formule des probabilités totales, l'autre faisant intervenir explicitement un arbre de probabilités.
3. *Une question entendue à l'oral du Capes :* ≪ Est-ce qu'une probabilité conditionnelle c'est une probabilité ? ≫ On répondra et justifiera en adoptant le point de vue du supérieur.
4. Proposer une démonstration de la formule des probabilités totales.
5. Démontrer l'égalité donnant l'espérance d'une loi binômiale de deux façons :
5.1. - soit en utilisant la linéarité de l'espérance,
5.2. - soit en faisant intervenir une somme classique $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k$ dont on précisera la valeur (dans ce but, on pourra par exemple dériver la fonction $x \mapsto (1 + x)^n$).
6. L'exercice suivant tiré du manuel *Le livre scolaire* de la classe de Première propose une démonstration de la loi de König-Huyguens. Proposer une démonstration plus synthétique utilisant plus systématiquement des propriétés de l'espérance, en particulier la linéarité.

Voir le manuel

7. Formellement, si X et Y sont des variables aléatoires, quelle est la définition de $(X < Y)$?

8. Proposer une démonstration établissant la linéarité de l'espérance, dans le cadre fini.

`Exercice 2.`
1. Dans la salle des profs, 60% ont plus de 50 ans ; un professeur de plus de 50 ans sur trois porte des lunettes et un professeur de moins de 50 ans sur deux porte des lunettes. Quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard ait plus de 50 ans ?
2. Dans le programme de *Première* de *Spécialité Mathématiques*, relever précisément parmi les quatre tirets des Objectifs en Probabilités et Statistiques la problématique en jeu dans cet exercice. Quel paragraphe du programme de Terminale Complémentaire est en jeu dans cet exercice ?

`Exercice 3.` On considère un entier $n > 0$, et deux variables aléatoires X et Y suivant une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.
1. Un élève demande : « Est-ce que cela veut dire que l'on a toujours $X = Y$? ». Proposer une réponse.
2. A partir de maintenant on suppose que les variables X et Y sont indépendantes. Calculer $p\,(X = Y)$. *Indication :* On pourra décomposer l'évènement $(X = Y)$ en union disjointe d'évènements plus simples.
3. Calculer $p\,(X < Y)$.

`Exercice 4.`
On considère un entier $n \geq 2$, et un entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$. Une urne contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On tire toutes les boules, une à une et sans remise. Une variable aléatoire X désigne le rang de la dernière boule blanche tirée.
1. Montrer que pour tout entier p tel que $p \leq n$ on a $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
2. Pour des entiers positifs a et b tels que $1 \leq b \leq a$ exprimer $a\binom{a-1}{b-1}$ en fonction de $\binom{a}{b}$.
3. Déterminer la loi de X.
Indication : on doit trouver $p(X = i) = \frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}$.
4. Calculer l'espérance de X.

`Exercice 5.`
1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. On pourra :
- exprimer de deux façons différentes le coefficient devant X^n dans le polynôme $(1+X)^n(1+X)^n$=(1+X)^{2n}
- ou compter le nombre de parties à n éléments dans un ensemble à $2n$ éléments.
2. On fixe un entier $n \geq 1$. Deux personnes jouent à pile ou face avec des pièces non truquées : chaque joueur lance la pièce n fois. On suppose les lancers indépendants. Calculer la probabilité que les deux joueurs obtiennent pile le même nombre de fois. On pourra introduire des variables aléatoires bien choisies.

`Exercice 6.` Un examen sous forme de QCM comprend 20 questions, avec 5 réponses possibles par question. Une candidate sait répondre à chacune des questions avec une même probabilité $p \in [0, 1]$. Lorsqu'elle connaît la réponse, elle répond bien. Lorsqu'elle ne connaît pas la réponse, elle répond alors au hasard. On note A_i l'évènement *la candidate répond bien à la i-ème question* et S la variable aléatoire comptant le nombre total de bonnes réponses de la candidate.
1. Calculer $p(A_1)$.

2. Que vaut l'espérance de la variable aléatoire S ?
3. On considère qu'une bonne réponse rapporte un point, et qu'une mauvaise réponse enlève un certain nombre de points. Un enseignant souhaite que l'espérance de la variable aléatoire correspondant à la note obtenue soit égale à la moyenne lorsque $p = 1/2$. Combien doit-il enlever de points par mauvaise réponse ?

`Exercice 7.` Dans une usine, on utilise deux machines M_1 et M_2 pour fabriquer des pièces cylindriques en série. Pour une période donnée, leurs probabilités respectives de tomber en panne sont respectivement $0,01$ et $0,008$. De plus, la probabilité que M_2 soit en panne sachant que M_1 est en panne est égale à $0,4$.

Quelle est la probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne ?

`Exercice 8.` On consid`ere des entiers k, n et r tels que $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq r$. On procède à un tirage de k individus parmi une population de taille n. Une variable aléatoire X compte le nombre d'individus tirés parmi une sous-population de taille r. Déterminer la loi de X dans les cas où le tirage est effectué
1. avec remise ou
2. sans remise.

`Exercice 9.` Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité $p \in [0, 1]$, l'information reçue d'une personne est transmise telle quelle à la personne suivante. Avec une probabilité $1 - p$, l'information reçue d'une personne est transmise de façon contraire à la personne suivante.
1. Introduire <u>proprement</u> p_n qui corresponde à la probabilité que l'information soit bien transmise après n transmissions. Etablir une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire une expression simple de p_n. Que dire du comportement de (p_n) ?

`Exercice 10.` On lance deux dés, et on note D_1 et D_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats des deux dés. On note X et Y les variables aléatoires définies par $X = \min(D_1, D_2)$ et $Y = \max(D_1, D_2)$.
1. Donner la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X.
3. En déduire assez rapidement l'espérance de Y (on pourra reconnaître $X + Y$).

`Exercice 11.` On fixe un entier $n > 1$.
1. On tire au hasard et uniformément un entier X entre 1 et n, puis au hasard et uniformément un entier entre 1 et X que l'on appelle Y. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer l'espérance de Y.
3. Cet exercice a-t-il pour contexte le cadre fini ou infini ?

`Exercice 12.` *Exercice classique présent dans de nombreux manuels...malheureusement d'actualité* On souhaite dépister une maladie parmi une population de 8000 personnes. On suppose qu'on dispose d'une méthode d'analyse infaillible de prélèvements sanguins. On considère que les individus sont touchés par la maladie de manière indépendante, et que cette maladie touche statistiquement 1% de la population. On se propose de comparer deux méthodes pour le dépistage.

- Méthode A : on effectue les 8000 analyses individuelles.
- Méthode B : on répartit les 8000 individus en n groupes de r prélèvements (donc $n \times r = 8000$).

Pour chacun des groupes, on mélange les r prélèvements obtenus, puis on procède à une analyse de chacun des n mélanges obtenus. Quand un mélange est négatif, aucun des membres du groupe n'est malade. Quand un mélange est positif, au moins un des membres du groupe est malade : on procède alors à une analyse individuelle pour chacune des r personnes composant le groupe.

1. On étudie dans cette question la méthode B.
1.a. Pour un groupe de r personnes, quelle est la probabilité que le mélange ait un test positif ? On note α cette probabilité.
1.b. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de groupes positifs. En supposant que la composition de chacun des n groupes est indépendante des autres groupes (on admet que c'est une hypothèse raisonnable tant que r est "petit" (disons $r \leq 8000/100 = 80$)), reconnaître la loi de X et en déduire son espérance.
1.c. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre total d'analyses effectuées avec la méthode B. Donner une expression de l'espérance de Y en fonction de r, α et n. Calculer une approximation de l'espérance de Y en considérant que $1 - \frac{r}{100}$ est une approximation de $(1 - \frac{1}{100})^r$.
1.d. Au fait, pourquoi peut-on penser que $1 - \frac{r}{100}$ est une approximation raisonnable de $(1 - \frac{1}{100})^r$?
2. En utilisant l'approximation de la question précédente, donner la valeur de r qui minimise le coût du dépistage. Finalement, quelle méthode est la plus économique ?

`Exercice 13.` Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes. Cette compagnie effectue une étude basée sur 2 trajets par jour pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.

Un trajet coûte 10 euros ; en cas de fraude, l'amende est de 100 euros. Damien fraude systématiquement lors des 40 trajets étudiés. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où Damien a été contrôlé.
1.a. On suppose que $p = 0,05$. Calculer à 10^{-4} près la probabilité que Damien soit contrôlé au plus 2 fois.
1.b. Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique réalisé par Damien. Calculer $E(Z)$.
2. On ne connaît plus la valeur de p. Pour quelles valeurs de p la fraude systématique est-elle favorable à Damien ?

`Exercice 14.` Une variable aléatoire discrète X suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Les valeurs que prend X sont affichées sur un écran, mais celui-ci est défaillant. Lorsqu'il doit afficher le nombre 0, il affiche n'importe quelle valeur entre 1 et n, au hasard de façon équiprobable. Si X n'est pas nul, le compteur affiche la valeur exacte de X. Soit Y le numéro aléatoire affiché.
1. Décrire la loi de Y.
2. Montrer que

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}(1-p)^n .$$

En déduire $\mathbb{E}(Y)$.
3. L'écran affiche le chiffre 1. Quelle est alors la probabilité que la variable aléatoire X ait pris réellement la valeur 1 ?

`Exercice 15.` Un automobiliste doit dévisser dans le brouillard les boulons d'une roue de sa voiture. Il utilise une croix dont les quatre extrémités sont des clefs de tailles différentes indiscernables au toucher.

1. Il procède au hasard, sans méthode. On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre d'essais pour trouver la bonne clef. Calculer la probabilité de faire trois essais pour trouver la bonne clef. Généraliser à n essais. En déduire la loi de X.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

3. Il procède au hasard, en éliminant les extrémités déjà testées. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre d'essais. Donner la loi de Y.

4. Calculer l'espérance et la variance de Y.

Evaluation 2 de 2022
Durée : 2 h

L'usage des calculatrices et des téléphones est interdit. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent êtres utilisés pour la suite du problème. Il ne faut pas hésiter à traiter les questions dans l'ordre de son choix. Quand ce n'est pas précisé on considère qu'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ correspond aux différentes situations décrites.

Bien lire le sujet et commencer par ce que vous préférez.

Comme d'habitude, on justifiera précisément tout résultat annoncé.

Merci de numéroter les intercalaires et d'en indiquer leur nombre total, avant l'heure de rendre les copies.

Exercice A

A.1 Proposer une solution à l'exercice ci-dessous qui soit destinée à une classe de lycée.

Un quart d'une population de souris porte un anticorps A. Quand une souris porte l'anticorps A, alors deux fois sur cinq elle porte l'anticorps B. Si elle ne porte pas l'anticorps A, cinq fois sur six elle ne porte pas l'anticorps B.

Calculer la probabilité qu'une souris ne porte pas l'anticorps A sachant qu'elle ne porte pas l'anticorps B.

A.2 Démontrer l'égalité donnant l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale, de deux façons :
- en utilisant la linéarité,
- en faisant intervenir une somme du type $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k$ dont on retrouvera la valeur.

Exercice B

Dans tout cet exercice N désigne un entier supérieur ou égal à 2. Un joueur lance une pièce équilibrée indéfiniment, et on suppose les tirages indépendants. On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents. On peut aussi appeler X_N le nombre de *changements* au cours des N

premiers lancers. Par exemple, si les 9 premiers lancers ont donné successivement
`Pile, Pile, Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, Pile`
(ce que l'on pourra noter `PPFPFFFPP`)
alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (car il y aura eu quatre changements aux $3^{\text{ième}}$, $4^{\text{ième}}$, $5^{\text{ième}}$ et $8^{\text{ième}}$ lancers).

Au besoin, on notera `PPFPFFFPP` pour l'évènement *avoir d'abord obtenu, et dans cet ordre, les lancers Pile, Pile, Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, Pile*, et l'on pourra s'autoriser ce type de notations pour ce type d'évènements.

B.1 Justifier que, par exemple, $\mathbb{P}(FFP) = 1/8$.

Pour toute la suite, on s'autorisera à utiliser ce type de résultats, c'est-à-dire que pour tout entier $n \geq 1$ et tout choix de résultats $A_1, \ldots, A_n$ dans {F,P} on a $\mathbb{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = 1/2^n$.

B.2 Justifier que $X_N(\Omega) = \{0, \ldots, N-1\}$. En particulier, on montrera que chacune des valeurs $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ correspond bien à un cas qui peut se produire lors d'un lancer.

B.3 Déterminer la loi de X_2 et montrer que $E(X_2) = 1/2$.

B.4 Déterminer la variance de X_2.

B.5 Déterminer $\mathbb{P}(X_N = 0)$.

B.6 Déterminer $\mathbb{P}(X_N = 1)$.

B.7 Montrer que pour tout entier $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ on a

$$\mathbb{P}\big(\,(X_{N+1} - X_N = 0) \cap (X_N = k)\,\big) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_N = k).$$

B.8 En déduire que $\mathbb{P}\left(X_{N+1} - X_N = 0\right) = \frac{1}{2}$.

B.9 Reconnaître la loi de $X_{N+1} - X_N$ et en déduire la valeur de l'espérance $E(X_N)$ pour tout $N \geq 2$.