# Feuille 3 : Lois discrètes dénombrables, lois à densité - Chaînes de Markov

Master Enseignement Mathématiques - Probabilités et statistiques.

---

**Points de cours fondamentaux**

▶ définition de variable aléatoire à densité
▶ définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète infinie (on insistera sur l'existence); variance
▶ définition de l'espérance d'une variable aléatoire continue (on insistera sur l'existence); variance
▶ lois discrètes : lois géométriques et de Poisson (définitions et principales propriétés)
▶ lois à densité : lois uniformes et exponentielles (définitions et principales propriétés)
▶ connaître les sommes classiques $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1}$; savoir justifier, soit en étudiant une fonction $f_n \ : \ x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$, soit en utilisant une série entière et des justifications précises
▶ définition simple de chaîne de Markov (niveau lycée); interprétation des éléments de la matrice
▶ définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire et propriétés

---

`Exercice 1.` *En lien avec les programmes.*
**1.** Calculer la fonction de répartition et l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.
**2.** Démontrer qu'une variable aléatoire suivant une loi géométrique est sans mémoire.
**3.** Démontrer qu'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle est sans mémoire.
**4.** La fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité est-elle toujours continue ?
**5.** La fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité est-elle toujours dérivable ?
**6.** Calculer l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

`Exercice 2.` *Chaînes de Markov.*
**1.** Donner les principaux points des programmes relatifs aux chaînes de Markov. Donner pour chacun un énoncé de cours possible en vous inspirant des manuels.
**2.** Proposer une définition de chaîne de Markov que l'on puisse donner au lycée.
**3.** Dans cette question **3.** on considère l'exercice suivant tiré du manuel *Sesamaths* de *Mathématiques expertes.*

**62** Toutes les semaines, un lycée organise un concours de mathématiques. L'une des meilleures élèves, Évane, est toutes les semaines sur le podium. Si elle est à la première place une semaine donnée, elle est à la deuxième la semaine suivante avec une probabilité de 0,4 et à la troisième avec une probabilité de 0,1. Si elle est à la deuxième, elle le reste la semaine suivante avec une probabilité de 0,5 et elle passe à la troisième avec une probabilité de 0,1. Finalement, si elle est une semaine donnée à la troisième place, elle remonte à la deuxième avec une probabilité de 0,3 et à la première avec une probabilité de 0,6.

**1.** Justifier que la situation peut être modélisée avec une chaîne de Markov dont on précisera l'ensemble des états.

**2.** Donner la matrice de transition de cette chaîne de Markov ainsi que son graphe.

**3.1.** Résoudre l'exercice.

**3.2.** *Question très classique.* En liaison avec l'exercice, on note $P$ la matrice de transition et $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des distributions associées. Démontrer en utilisant la formule des probabilités totales la relation du cours $\forall n \in \mathbb{N},\ \pi_{n+1} = \pi_n P$.

**3.3.** Déterminer par le calcul l'ensemble[1] des distributions invariantes pour cette chaîne de Markov.

**4.** Démontrer que la matrice de transition associée à une chaîne de Markov est une matrice stochastique.

**5.** Prouver que les matrices stochastiques ont une valeur propre commune. (On pourra chercher un vecteur propre commun à ces matrices.)

**6.** On suppose qu'une suite de distributions $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est associée à un processus de Markov et à une matrice de transition $P$. Montrer que si $(\pi_n)$ converge vers une matrice $\pi$ alors $\pi = \pi P$. (Il existe une démonstration très courte.)

**7.** Donner (sans démonstration !) un énoncé du théorème de Perron-Frobenius. On peut chercher dans la littérature, par exemple dans l'article

`https://www.apmep.fr/IMG/pdf/07-Bonneval_C.pdf` à l'APMEP.

On trouve également une version plus simple énoncée (sans le nom) dans le manuel *Le livre scolaire*.

`Exercice 3.` *Une méthode classique : décomposer un évènement en une union d'évènements disjoints.*

Deux variables aléatoires indépendantes $X$ et $Y$ suivent des lois géométriques de paramètres $p$ et $q$ respectivement. On souhaite calculer $P(Y > X)$.

**1.** Pour tout $k \geq 1$, calculer $P\left(X = k \text{ et } Y > k\right)$.

**2.** Conclure. *Indication :* Quel est le lien entre l'évènement $(Y > X)$ et les évènements $(X = k \text{ et } Y > k)$ ?

`Exercice 4.` *Loi de Pascal*

On fixe un entier $r \geq 1$ et un réel $p \in ]0, 1[$. On considère que l'on a une probabilité $p$ de gagner à un jeu, jeu dont on imagine avoir fait des parties une infinité de fois. Une variable aléatoire $X$ compte le nombre d'essais nécessaires pour arriver au $r$-ième succès.

1. En fait il est muni d'une structure !

**1.** Déterminer $X(\Omega)$
**2.** Déterminer la loi de $X$ en utilisant un arbre.
*Indication :* pour de bonnes valeurs de $k$, on doit trouver

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}.$$

**3.** Montrer que $X$ admet une espérance, sans la calculer. (On utilisera des résultats assurant la convergence d'une série.)
**4.** En étudiant les dérivées de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, prouver que $\displaystyle\sum_{k=h}^{+\infty}\binom{k}{h}x^{k-h}=\frac{1}{(1-x)^{h+1}}$ en précisant le domaine de validité.
**5.** Exprimer $k\binom{k-1}{r-1}$ en fonction de $\binom{k}{r}$.
**6.** En déduire que $E(X)=r/p$.

`Exercice 5.`
Selon un modèle simplifié, le nombre de personnes en contact avec une certaine personne malade correspond à une variable aléatoire $N$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Une personne qui est contact a une probabilité $p$ de développer la maladie, et on imagine que les réactions des personnes en contact avec la maladie sont indépendantes. On introduit $X$ une variable aléatoire correspondant au nombre de personnes malades.
**1.** On considère deux entiers $k$ et $n$. En interprétant l'énoncé, et en faisant le lien avec une loi connue, donner la valeur de $P_{(N=n)}(X=k)$.
**2.** En déduire la loi de $X$.
**3.** Déterminer l'espérance de $X$.

`Exercice 6.`
On suppose qu'une variable aléatoire $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On considère une variable aléatoire $Y$ vérifiant l'égalité $Y=\frac{1}{1+X}$.
**1.** Déterminer la loi de $Y$.
**2.** En déduire l'espérance de $Y$.

`Exercice 7.` Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $X$ une variable aléatoire définie sur $\Omega$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
**1.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} k\,P(X=k)=\left(\sum_{k=0}^{n-1}P(X>k)\right)-nP(X>n).$$

**2.** On suppose que la série de terme général $u_k=P(X>k)$ converge.
a) Montrer que $X$ admet une espérance.
b) En remarquant que $P(X>n)=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}P(X=k)$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,P(X>n)=0$.
c) En déduire $E(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}P(X>k)$.
**3.** Réciproquement, montrer que si l'on suppose que $E(X)$ existe, alors la série de terme général

$u_k = P(X > k)$ converge, et que l'on a aussi

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) \ .$$

`Exercice 8.` En liaison avec l'introduction des intervalles de fluctuations, les programme de Terminale S demandaient entre 2013 et 2019 d'introduire un réel $u_\alpha$ comme suit :

| Contenus | Capacités attendues | Commentaires |
|---|---|---|
| Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.<br><br>Théorème de Moivre Laplace (admis). | • Connaître la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et sa représentation graphique.<br><br>◙ Démontrer que pour $\alpha \in \left]0,1\right[$, il existe un unique réel positif $u_\alpha$ tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1-\alpha$ lorsque $X$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. | Pour introduire la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, on s'appuie sur l'observation des représentations graphiques de la loi de la variable aléatoire $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ où $X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, et cela pour de grandes valeurs de $n$ et une valeur de $p$ fixée entre 0 et 1. Le théorème de Moivre Laplace assure que pour tous réels $a$ et $b$, $P(Z_n \in [a,b])$ tend vers |

On souhaite justifier précisément l'existence et l'unicité d'un tel réel $u_\alpha$.

**1.** Etudier les variations et les limites de la fonction $\Phi\ : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(x) = \int_{-x}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \quad .$$

**2.** Conclure en appliquant précisément un théorème du cours de Terminale.

Evaluation 3 de l'année 2022-23

Durée : 2 h

L'usage des calculatrices, des téléphones, et de tout appareil électronique est interdit. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent êtres utilisés pour la suite du problème. Il ne faut pas hésiter à traiter les questions dans l'ordre de son choix. Quand ce n'est pas précisé on considère qu'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ correspond aux différentes situations décrites.

Bien lire le sujet et commencer par ce que vous préférez.

Comme d'habitude, on justifiera précisément tout résultat annoncé.

Merci de numéroter les intercalaires et d'en indiquer leur nombre total, avant l'heure de rendre les copies.

# Exercice A

On considère la situation suivante tirée du manuel *Le livret scolaire* de Terminale Experte.

> On modélise la météo d'un jour à l'autre en considérant uniquement les états suivants : beau temps $(\mathbf{B})$, temps nuageux $(\mathbf{N})$, temps pluvieux $(\mathbf{P})$.
> La modélisation nous indique que lorsqu'il fait beau, alors la probabilité que le lendemain soit nuageux est 0,5 et que le lendemain soit pluvieux est 0,2.
> Lorsque le temps est nuageux, le lendemain reste nuageux avec une probabilité de 0,4 et devient pluvieux avec une probabilité de 0,4 également.
> Finalement, lorsqu'il pleut, la probabilité que le lendemain soit nuageux est égale à 0,6 alors que la probabilité qu'il fasse beau est 0,1.

**A.1** Donner sans justification le graphe probabiliste décrivant la situation de l'exercice.

**A.2** Pour tout entier non nul $n$ on note (respectivement) $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{N}_n$ et $\mathcal{P}_n$ les évènements *le temps est (respectivement) beau, nuageux ou pluvieux le* $n^{\text{ième}}$ *jour*. On considère alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de matrices lignes de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout entier non nul $n$ on ait

$$U_n = (\ P(\mathcal{B}_n)\ ,\ P(\mathcal{N}_n)\ ,\ P(\mathcal{P}_n)\ ).$$

Donner sans justification la matrice de transition $P$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_{n+1} = U_n.P \qquad (E).$$

**A.3** Démontrer l'égalité $(E)$ en utilisant la formule des probabilités totales.

# Exercice B

Pour un réel $p \in ]0,1[$ fixé, on rappelle que l'on dit qu'une variable aléatoire $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.

Dans cet exercice, on adopte la définition suivante : on dit qu'une variable aléatoire discrète $X$ est sans mémoire si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si pour tout $k$ et $n$ dans $\mathbb{N}^*$ on a

$$P_{(X>n)}(X > n+k) = P(X > k) \quad .$$

Le but de cet exercice est de prouver qu'une variable aléatoire $X$ discrète est sans mémoire si et seulement si elle suit une loi géométrique relativement à un certain paramètre $p \in ]0,1[$.

**1.** On considère un réel $p \in ]0,1[$ et $X$ une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p$.

- **a.** Pour $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > m)$ en insistant sur les explications d'un éventuel calcul de somme.
- **b.** En déduire que $X$ est sans mémoire.

**2.** Réciproquement, on considère une variable aléatoire $X$ sans mémoire. On pose $q = P(X > 1)$.

- **a.** Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a $P(X > n) = q^n$. *Indication :* une possibilité est de procéder par récurrence en calculant de deux façons $P_{(X>n)}(X > n+1)$.
- **b.** En déduire que $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

**3.** (**Question indépendante.**) Déterminer en justifiant, et en particulier en justifiant d'éventuelles sommes utilisées, l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

**4.** (**Question indépendante.**) On fixe un réel $p \in ]0,1[$ et on suppose dans cette question que $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètre $p$. Calculer $P(X = Y)$.