EVALUATION DU 6 NOVEMBRE 2023
Durée : 2 h

L'usage des calculatrices, téléphones, et de tout dispositif électronique est interdit. Il ne faut pas hésiter à traiter les questions dans l'ordre de son choix. Quand ce n'est pas précisé on considère qu'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ correspond aux différentes situations décrites.

Bien lire le sujet et commencer par ce que vous préférez. Comme d'habitude, on justifiera précisément tout résultat annoncé.

Exercice A

A.1. Enoncer et démontrer une version de la formule des probabilités totales de votre choix.

A.2. Enoncer et démontrer une version de la formule de Bayes faisant intervenir plusieurs évènements A_i (éventuellement A et $\overline{A}$).

A.3. On considère un entier $n > 1$ et un réel $p \in [0, 1]$. On suppose qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p, au sens où X compte le nombre de succès dans...

Redémontrer l'égalité donnant $P(X = k)$ avec la méthode de votre choix.

Exercice B

Résoudre la question **1 b)** de l'exercice suivant, en se ramenant au dénombrement, c'est-à-dire sans utiliser une loi de probabilité connue.

Sujet corrigé

Énoncé (d'après Bac 2000)

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes et on donnera les réponses sous forme de fractions.

Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « Les boules sont toutes de couleurs différentes » ;

E_2 : « Les boules sont toutes de la même couleur ».

b) On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules, associe le nombre de boules bleues tirées.

Établir la loi de probabilité de X.

Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Soit *k* un entier supérieur ou égal à 2.

On procède cette fois de la façon suivante : on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

On effectue ainsi *k* tirages successifs.

Quelle est la valeur minimale de *k* pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

Tournez la page S.V.P

Exercice C

Soient r et b des entiers strictement positifs. On étudie le contenu d'une urne qui va évoluer. Cette urne contient au départ b boules bleues et r boules rouges, toutes indiscernables au toucher. Une boule est choisie au hasard dans l'urne. On note sa couleur et on la remet dans l'urne en ajoutant une boule supplémentaire de la même couleur. Puis on recommence : on tire une boule et on rajoute une boule de la même façon...

Pour tout entier n strictement positif on note :
- $\mathcal{B}_n$ (respectivement $\mathcal{R}_n$) l'évènement *la n-ième boule tirée est bleue (respectivement rouge).*
- X_n la variable aléatoire égale à 1 si la n-ième boule tirée est bleue et à 0 sinon.

B.1 Déterminer la loi de X_1.

B.2 Déterminer la loi de X_2. (On peut utiliser un arbre, ou la formule des probabilités totales.)

On remarquera un lien fort entre la loi de X_1 et la loi de X_2. La suite de l'exercice a pour objectif de démontrer que pour tout entier n il y a le même lien avec la loi de X_n. On considère alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de variables aléatoires définie par $S_0 = b$ et par l'égalité $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k$. On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

B.3 Dire en quelques mots et sans justification à quoi correspond S_n. Donner $S_n(\Omega)$ en justifiant précisément l'égalité.

B.4 Pour tout entier $k \in \{b, \ldots, n+b\}$ calculer $P_{(S_n=k)}(X_{n+1} = 1)$. Indication : on pourra utiliser l'interprétation de l'évènement $(S_n = k)$ pour exprimer la probabilité cherchée comme un quotient du type *nombre de cas favorables sur nombre de cas total.*

B.5 En déduire, à l'aide de la formule des probabilités totales, que $P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{b+r+n}$.

B.6 En utilisant une récurrence, déterminer la loi de X_n.