EVALUATION DU 13 DÉCEMBRE 2023
Durée : 2 h

L'usage des calculatrices, des téléphones, et de tout appareil électronique est interdit. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent êtres utilisés pour la suite du problème. Il ne faut pas hésiter à traiter les questions dans l'ordre de son choix. Quand ce n'est pas précisé on considère qu'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ correspond aux différentes situations décrites.

Bien lire le sujet et commencer par ce que vous préférez.

Comme d'habitude, on justifiera précisément tout résultat annoncé.

Merci de numéroter les intercalaires et d'en indiquer leur nombre total, avant l'heure de rendre les copies.

Exercice A

On considère la situation de l'exercice suivant.

(Insérer votre exercice de lycée préféré sur ce thème !)

Pour tout entier non nul n on note $\mathcal{A}_n$ (respectivement $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{C}_n$) les évènements *le lapin est dans la galerie A (respectivement B et C) à l'étape n*. On considère alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de matrices lignes de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout entier non nul n on ait

$$X_n = (\ \mathbb{P}(\mathcal{A}_n)\ ,\ \mathbb{P}(\mathcal{B}_n)\ ,\ \mathbb{P}(\mathcal{C}_n)\ ).$$

A.1 Donner sans justification le graphe probabiliste décrivant la situation de l'exercice et de même sans justification la matrice de transition P telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_{n+1} = X_n.P \qquad (E).$$

A.2 Démontrer l'égalité (E) en utilisant la formule des probabilités totales.

A.3 On suppose que la suite (X_n) converge. Déterminer en justifiant la seule limite possible.

Exercice B

Répondre à une seule de ces deux questions.

1. Dans le cadre d'une loi à densité, définir l'espérance d'une variable aléatoire.

2. Montrer que la fonction de répartition d'une variable aléatoire est toujours croissante.

Exercice C

Soit $p \in]0, 1[$. On considère une pièce de monnaie déséquilibrée, telle que la probabilité d'apparition de Pile est égale à p, et (donc) celle de Face est égale à $1 - p$, nombre que l'on notera q. On effectue une suite de lancers indépendants, le premier étant assez naturellement numéroté 1. On définit pour tout entier $k \geq 1$ les évènements $\mathcal{P}_k$: *obtenir Pile au* $k^{\text{ième}}$ *lancer*, et $\mathcal{F}_k$: *obtenir Face au* $k^{\text{ième}}$*ème lancer*.

On considère la variable aléatoire X qui prend la valeur 0 si dans la succession des lancers la séquence PF n'apparaît jamais, et qui pour tout entier $k \geq 2$ prend la valeur k si et seulement si la séquence Pile-Face apparaît pour la première fois aux $(k-1)^{\text{ième}}$ et $k^{\text{ième}}$ lancers (par exemple, dans le cas d'une succesion *Face-Pile-Pile-Face-...* la variable aléatoire X prend la valeur 4.).

1. On considère une variable aléatoire Z suivant une loi géométrique de paramètre $r \in]0, 1[$. Montrer précisément que Z admet une espérance et la calculer.

Mettre en valeur (encadrer, souligner,...) la somme obtenue qui exprime l'espérance : elle pourra servir pour la suite de l'exercice.

2. On revient à la situation décrite dans l'exercice. Déterminer en justifiant les valeurs de $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ et $P(X = 4)$.

3. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$ on a $P(X = k) = \left(\sum_{i=0}^{k-2} p^i q^{k-2-i} \right) pq$.

4. Donner pour tout entier $k \geq 2$ une expression de $P(X = k)$ ne faisant plus apparaître le symbole somme. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

5. Calculer $P(X = 0)$ et donner une interprétation.