Test 1

M1MEEF Parcours Mathématiques - Arithmétique

Pour les démonstrations des théorèmes et pour les exercices, on peut utiliser les théorèmes du cours de façon précise et cohérente. On peut essayer de réviser par paliers, en ne passant au palier $n+1$ qu'après maîtrise du palier n.

Lorsque le contexte n'est pas précisé, c'est à vous de préciser.

On évitera de mélanger dans un même énoncé une définition et un théorème.

Palier 1

- Reprendre les conseils de rédaction.
- Définition de la relation de divisiblité, de diviseur, de multiple.
- Donner une définition de congruence.
- Savoir démontrer la compatibilité de la relation de congruence pour les différentes opérations algébriques.
- Savoir démontrer que la divisibilité se conserve par combinaison linéaire et savoir donner un énoncé précis.
- Enoncer le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.
- Définition de nombre premier.
- Enoncer le lemme de Gauss. (Il est parfois appelé théorème de Gauss.)
- Donner une définition de l'ensemble $\mathbb{D}$.
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre rationnel soit un nombre décimal, en fonction de son écriture en fraction irréductible.

Palier 2

- Démontrer le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.
- Définition du pgcd de deux entiers que l'on puisse proposer à une classe lycée. Que faut-il vérifier pour que cette définition soit bien posée ? Savoir le vérifier.
- Définition du ppcm de deux entiers.
Que faut-il vérifier pour que cette définition soit bien posée ? Savoir le vérifier.
- Définition de nombres premiers entre eux.
- Connaître deux méthodes pour calculer le pgcd deux nombres. Savoir les appliquer.
- Enoncer le lemme d'Euclide. Savoir à quoi il sert.
- Enoncer la relation de Bézout.
- Enoncer le théorème de Bézout. (Vous avez remarqué qu'on va dans notre cours le distinguer de la relation de Bézout !)
- Savoir démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
- Savoir résoudre *les équations diophantiennes simples*[1] en mettant en avant un raisonnement par analyse et synthèse.
- Enoncer le théorème fondamental de l'arithmétique.

[1] Ici je reprends le vocabulaire du programme de Terminale.

Palier 3

- Avoir bien compris le raisonnement par analyse et synthèse. Maîtriser un modèle de rédaction.
- Démontrer le lemme d'Euclide.
- Démontrer le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.
- Donner une présentation de l'algorithme d'Euclide en *pseudocode*.
- Démontrer le théorème de Bézout.
- Démontrer l'identité de Bézout.
- Enoncer et démontrer un théorème liant ppcm et pgcd.
- Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
- Démontrer la partie *existence* du théorème fondamental de l'arithmétique.
- Démontrer la partie *unicité* du le théorème fondamental de l'arithmétique.
- Proposer un énoncé décrivant l'ensemble des diviseurs d'un entier en fonction de sa décomposition en nombres premiers. Savoir l'utiliser.
- Donner une condition nécessaire et suffisante faisant intervenir le développement décimal propre pour qu'un nombre réel soit rationnel.
- Démontrer que l'algorithme d'Euclide termine.
- Démontrer que l'algorithme d'Euclide est valide.

Palier 4

- Enoncer et savoir démontrer un lemme préparatoire à l'algorithme du crible d'Eratosthène.
- Définition de valuation p-adique.
- Enoncer et démontrer un théorème sur la valuation p-adique d'un produit d'entiers mn.
- Définition d'un idéal.
- Savoir démontrer que $\mathbb{Z}$ est principal.
- Définition moderne de pgcd par les idéaux.
- Définition moderne de ppcm par les idéaux.