

Le cadre de cette thèse est l'étude de l'anneau des cycles algébriques associé à la jacobienne d'une courbe lisse. Plus précisément, on en considère un sous-anneau appelé "anneau tautologique". Après avoir décrit ce cadre et les principaux résultats connus, nous annoncerons les résultats obtenus dans ce travail, à savoir le calcul de relations nouvelles entre cycles modulo équivalence algébrique en fonction des systèmes linéaires admis par la courbe.

Cadre et principaux résultats connus

On considère C une courbe lisse projective de genre g . On note JC la variété jacobienne associée. Pour tout entier n positif, C_n désignera le produit symétrique de la courbe. A tout choix d'un point de C_n on peut associer un morphisme $u_n : C_n \rightarrow JC$. Pour tout k de $\mathbb{Z}$ la variété abélienne JC admet des homothéties que l'on note également k :

$$\begin{array}{ccc} k & : & JC \longrightarrow JC \\ & & x \longmapsto kx \end{array}$$

On utilise la notation $A(JC)$ pour l'anneau¹ des cycles modulo équivalence algébrique et $CH(JC)$ pour l'anneau de Chow. Ces anneaux seront toujours considérés *tensorisés par* $\mathbb{Q}$. Comme la jacobienne est une variété abélienne, ces anneaux sont naturellement munis d'un deuxième produit, le produit de Pontryagin. La transformation de Fourier réalise un isomorphisme de $A(JC)$ qui échange les deux produits. Elle est au coeur de la décomposition introduite par Arnaud Beauville dans [Bea86]. Appliquée dans ce cas, la décomposition s'écrit pour les cycles de codimension p :

$$A^p(JC) = \bigoplus_{i=p-g}^p A_{(i)}^p(JC)$$

où un cycle α est dans $A_{(i)}^p(JC)$ si et seulement si pour tout k on a $k^*\alpha = k^{2p-i}\alpha$, ou ce qui est équivalent : $k_*\alpha = k^{2g-2p+i}\alpha$.

Considérons par exemple le plongement de la courbe C dans JC . Il définit un cycle de $A^{g-1}(JC)$ que l'on note également C . On peut montrer que sa décomposition est la suivante :

$$(1) \quad C = C_{(0)} + \dots + C_{(g-1)} \quad \text{avec } C_{(i)} \in A_{(i)}^{g-1}(JC)$$

L'anneau tautologique est le plus petit sous-anneau de $A(JC)$ contenant C et stable pour les produits d'intersection, de Pontryagin, ainsi que pour les opérateurs k_* et k^* . On le note R . D'après Beauville ([Bea04]), l'anneau R muni du produit de Pontryagin est engendré par les composantes $C_{(i)}$. Par suite, R est de dimension finie, et admet la description :

$$R = \frac{\mathbb{Q}[C_{(0)}, \dots, C_{(g-1)}]}{\mathcal{R}}$$

où $\mathcal{R}$ désigne les relations entre les composantes $C_{(i)}$ pour le produit de Pontryagin.

Mais discuter la nullité de cycles modulo équivalence algébrique est un problème difficile en général. Dans le cas particulier de $\mathbb{Q}[C_{(0)}, \dots, C_{(g-1)}]$, et même des composantes $C_{(i)}$, on connaît peu de résultats de non-nullité. Pour des genres suffisamment grands, et des courbes génériques, des théorèmes de Ceresa et de Fakhruddin donnent la non-nullité de $C_{(1)}$ et de $C_{(2)}$ ([Cer83] et [Fak96]). Plus récemment, Atsuchi Ikeda ([Ike03]) a montré pour une courbe lisse plane générique de degré d que la composante $C_{(i)}$ n'est pas nulle dans l'anneau de Chow lorsque

¹On notera toujours la dimension en indice ($A_i(X)$ et $CH_i(X)$) et la codimension en exposant ($A^i(X)$ et $CH^i(X)$).

i vérifie l'encadrement $0 \leq i \leq d - 3$.

On s'intéresse en fait dans ce travail à l'autre problème, celui de montrer la nullité de cycles. Alexander Polishchuk obtient dans [Pol] et dans ce sens un résultat universel : il calcule un idéal I_g de relations valables pour toutes les courbes de genre g . Cet idéal est stable par transformation de Fourier, ce qui amène l'auteur à penser que le jeu de relations est complet pour les courbes génériques. On sait en revanche qu'il n'est pas complet pour toutes les courbes. Le résultat principal obtenu pour les courbes non génériques est celui énoncé par Elisabetta Colombo et Bert van Geemen :

Théorème 1. *Si la courbe C admet un revêtement de $\mathbb{P}^1$ de degré d , la composante $C_{(i)}$ est nulle pour tout $i \geq d - 1$.*

Notons $\mathcal{G} \subset C_d$ le système linéaire associé au revêtement. On peut définir pour tout n vérifiant l'encadrement $1 \leq n \leq d$ le système linéaire tronqué :

$$(2) \quad G_n = \{D \in C_n \mid \exists E \in C_{d-n}, D + E \in \mathcal{G}\}$$

La formule suivante lie la classe algébrique de la courbe G_n aux classes des images par homothéties de C . Cet élément important de la preuve du théorème ci-dessus est le point de départ de notre travail :

$$(3) \quad u_{n*}[G_n] = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{i} \binom{d}{n-i} i_* C$$

Résultats obtenus dans la thèse

Bien sûr G_d est le système linéaire $\mathcal{G}$, et tous ses diviseurs sont linéairement équivalents. L'image par u_d de la courbe G_d est donc un point de la jacobienne. Comme les dimensions ne sont pas conservées, le cycle algébrique $u_{d*}[G_d]$ est nul. En remplaçant alors dans (3) le cycle C par sa décomposition (1), on redémontre le théorème précédent.

Ce raccourci à l'esprit, on étend dans cette thèse la formule (3) aux systèmes linéaires de dimension r et de degré d (expression que l'on abrègera par la suite en g_d^r) :

Théorème 2. *Si C admet un g_d^r sans point de base, on a l'égalité dans $A^{n-r}(C_n)$:*

$$[G_n] = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r} \binom{d}{n - \sum_{u=1}^r i_u} \left(\prod_{v=1}^r \frac{(-1)^{i_v-1}}{i_v} \right) [\delta_{i_1, \dots, i_r} + (n - \sum_{u=1}^r i_u) o]$$

où o est un point quelconque de C et $\delta_{i_1, \dots, i_r}$ la diagonale généralisée dans $C_{\sum i_u}$:

$$\delta_{i_1, \dots, i_r} = \{i_1 x_1 + \dots + i_r x_r \mid x_i \in C\}$$

En appliquant à nouveau le raisonnement du paragraphe précédent à la classe $[G_d]$ associée à tout système linéaire, on obtient les relations dans l'anneau R :

Théorème 3. *Si la courbe C admet un g_d^r sans point de base, on a pour tout entier positif s la relation suivante dans $A_{(s)}^{g-r}(JC)$:*

$$\sum_{\substack{0 \leq a_1, \dots, a_r \\ a_1 + \dots + a_r = s}} \beta(d, a_1 + 1, \dots, a_r + 1) C_{(a_1)} * \dots * C_{(a_r)} = 0$$

$$\text{où} \quad \beta(d, a_1, \dots, a_r) = \sum_{i_1=1}^d \dots \sum_{i_r=1}^d (-1)^{i_1 + \dots + i_r} \binom{d}{i_1 + \dots + i_r} i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r}$$

Expliquons rapidement comment sont calculées les classes $[G_n]$: par récurrence, et en considérant la sous-variété $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ de $(\mathbb{P}^r)^n$ des éléments dont toutes les composantes sont sur un même hyperplan projectif. Si le g_d^r induit le morphisme $\Phi : C \rightarrow \mathbb{P}^r$, on considère le pullback de la classe $[\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n]$ par $\Phi^{\times n}$. Il fait apparaître la classe $[G_n]$ recherchée ainsi que des cycles indésirables. On conclut en identifiant ces cycles (liés aux classes $[G_k]$ lorsque $k < n$) et en utilisant la connaissance de l'anneau de Chow de $(\mathbb{P}^r)^n$. Précisons que le résultat est en fait obtenu dans l'anneau de Chow $CH^{g-r}(JC)$. La formule du théorème 2 en est sa simplification modulo équivalence algébrique.

Les relations obtenues à partir d'un g_d^r le sont dans $R \cap A_{(i)}^a(JC)$ pour $a \geq d - r + 1$. En particulier, on obtient dans $R \cap A_{(d-2r+1)}^{d-2r+2}(JC)$ une relation monomiale :

$$(4) \quad C(r, d, g) C_{(d-2r+1)} = 0$$

où pour tout entier r positif $C(r, d, g)$ est un polynôme de $\mathbb{Q}[d, g]$. Mais la nullité de $C_{(d-2r+1)}$ lorsque $C(r, d, g)$ est non nul n'est pas un résultat nouveau. On reconnaît en effet dans $C(r, d, g)$ le nombre de $r - 2$ plans $2r - 2$ sécants à la courbe considérée. L'existence d'un tel sous-espace garantit celle d'un g_{d-2r+2}^1 , et la nullité de $C_{(d-2r+1)}$ apparaît alors comme une conséquence du théorème 1. Si le résultat n'est pas nouveau, il peut laisser penser que la nullité de $C_{(d-1)}$ implique l'existence d'un g_d^1 .

On obtient en revanche des relations nouvelles entre cycles de R de dimension supérieure. Par exemple, dans le cas des courbes planes et gauches, on montre que pour g suffisamment grand il existe une courbe de degré d pour laquelle les relations obtenues ne se déduisent ni des relations de I_g ni du $g_{d'}^1$ induit par le système linéaire. On précise quelles sont les relations obtenues pour les courbes de genre inférieur à 10.

Organisation de la thèse

La thèse est organisée en cinq chapitres. On décrit dans le premier le cadre du travail. Mis à part le raccourci entre la formule (3) et le théorème 1 tous les résultats énoncés sont déjà connus.

L'objectif du deuxième chapitre est la démonstration du théorème 2. On donne une formule de récurrence liant pour tout n les cycles $[G_k]$ pour k variant de r à n et le cycle $[\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n]$. On en déduit une expression des classes $[G_k]$ dans l'anneau de Chow et dans l'anneau des cycles modulo équivalence algébrique.

Les trois derniers chapitres sont consacrés à l'étude des relations que l'on peut en déduire. Le troisième chapitre détaille l'obtention de relations à partir de l'égalité $u_{d*}[G_d] = 0$ en projetant

sur les différents espaces propres. On explique pourquoi les premières relations sont triviales, et donne une expression simple pour la première relation non triviale obtenue.

Le quatrième chapitre fait le lien entre les systèmes linéaires de dimension r et les $(r - 2)$ plans $2r - 2$ sécants à la courbe. Après avoir rappelé la formule de Castelnuovo, on montre comment elle apparaît dans la relation monomiale mettant en jeu $C_{(d-2r+1)}$.

On applique dans le cinquième et dernier chapitre les théorèmes démontrés aux courbes planes et gauches. On résume les résultats obtenus pour les courbes de genre $g \leq 10$.

Il peut être utile de consulter l'index des notations qui précède la bibliographie.

REFERENCES

- [Bea86] A. Beauville. Sur l'anneau de Chow d'une variété abélienne. *Math. Ann.*, **273**(no.4):647–651, 1986.
- [Bea04] A. Beauville. Algebraic cycles on Jacobian varieties. *Compos. Math.*, **140**(no.3):683–688, 2004.
- [Cer83] G. Ceresa. C is not algebraically equivalent to C^- in its Jacobian. *Ann. Math.*, **117**:285–291, 1983.
- [Fak96] N. Fakhruddin. Algebraic cycles on generic abelian varieties. *Compositio Math.*, **100**(no.1):101–119, 1996.
- [Ike03] A. Ikeda. Algebraic cycles and infinitesimal invariants on Jacobian varieties. *J. Algebraic Geom.*, **12**(no.3):573–603, 2003.
- [Pol] A. Polishchuk. Universal algebraic equivalences between tautological cycles on Jacobians of curves (à paraître). *Math. Zeitschrift*. arXiv:math.AG/0309160.