Arithmétique

Durée : 3 h

L'usage des documents, des calculatrices, des ordinateurs et des téléphones portables n'est pas autorisé. Les téléphones portables doivent être rangés dans les sacs. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent êtres utilisés pour la suite du problème. Il ne faut pas hésiter à traiter les questions dans l'ordre de son choix.

On considère l'exercice suivant que l'on ne demande pas de résoudre en totalité. Les questions auxquelles vous devez répondre sont indiquées plus bas dans *Les questions pour le candidat.*

L'exercice.

Un triplet Pythagoricien est un triplet (a, b, c) de trois entiers naturels strictement positifs vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

A.a. Vérifier que $(3, 4, 5)$ est un triplet Pythagoricien.
A.b. Démontrer que si (a, b, c) est un triplet Pythagoricien et si k est un entier naturel non nul, alors (ka, kb, kc) est aussi un triplet Pythagoricien.
A.c. Peut-on trouver un triplet Pythagoricien tel que $c > 10000$?

B. Dans cette question on traite l'exemple où $b = 12$. Déterminer tous les couples (a, c) d'entiers naturels strictement positifs tels que $(a, 12, c)$ soit un triplet Pythagoricien.

C. Un triplet Pythagoricien est dit primitif si le plus grand diviseur commun à a, b et c est égal à 1.
C.a. On considère un triplet Pythagoricien (a, b, c). Montrer que (a, b, c) est primitif si et seulement si a et b sont premiers entre eux.
C.b. Montrer que si (a, b, c) est un triplet Pythagoricien primitif, alors a et b sont de parité différente. Dans la suite du travail, on supposera que c'est b qui est pair.

D. L'objectif de l'ensemble de cette question **D** est de montrer que (a, b, c) est un triplet Pythagoricien primitif avec b pair si et seulement si il existe des entiers u et v premiers entre eux, de parité différente, vérifiant $u > v$, et tels que $a = u^2 - v^2$, $b = uv$ et $c = u^2 + v^2$. On commence par considérer (a, b, c) un triplet Pythagoricien primitif tel qu'il existe un entier n vérifiant $b = 2n$.
D.a. Montrer que $4n^2 = (c + a)(c - a)$.
D.b. Montrer que $p = \frac{c+a}{2}$ et $q = \frac{c-a}{2}$ sont deux entiers naturels premiers entre eux et vérifier que $n^2 = pq$.
D.c. En déduire que p et q sont des carrés.
D.d. En déduire qu'il existe deux entiers naturels non nuls u et v, premiers entre eux et de parité différente tels que $u > v > 0$, $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ et $c = u^2 + v^2$.
D.e. Montrer que si u et v sont deux entiers naturels non nuls, premiers entre eux et de parité différente, alors $u^2 - v^2$ et $2uv$ sont premiers entre eux.
D.f. Conclure.

Des réponses d' élèves :

Elève 1 (réponse à la question **C.a**) :

Supposons que (a, b, c) est un triplet Pythagoricien primitif. Choisissons d un entier positif qui divise a et b, et montrons qu'il vaut 1. Il existe a_1 et b_1 tels que $a = d.a_1$ et $b = d.a_1$. Alors $(d.a_1)^2 + (d.b_1)^2 = c^2$, donc $d^2(a_1^2 + b_1^2) = c^2$, donc d divise c^2. Comme d divise c^2, on a d qui c. Donc finalement d divise a, b et c donc d vaut 1 car (a, b, c) est primitif. On a bien montré que a et b sont premiers entre eux, ce qui répond à la question.

Elève 2 (réponse à la question **C.b**) :

Montrons que les entiers a et b ne peuvent pas être tous les deux impairs. Comme ils sont impairs, il existe m et n tels que $a = 2m + 1$ et $b = 2n + 1$.
$a^2 + b^2 = 4m^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 4m + 1 = c^2$
et $4m^2 + 4n^2 + 2 = c^2$. Je peux juste en déduire que c^2 est pair.

Elève 3 (réponse à la question **C.f**) :

On a supposé en début de question **D** que (a, b, c) est un triplet Pythagoricien primitif, avec b pair, puis on montre dans les questions **D.a**, **D.b**, **D.c** et **D.d** qu'il existe alors des entiers u et v avec les propriétés voulues qui vérifient les égalités $a = u^2 - v^2$, $b = uv$ et $c = u^2 + v^2$ ce qui conclut bien le travail.

Les questions pour le candidat.

(Type Epreuve 2)

1. Analyser la réponse de l'élève 1 en mettant en avant acquis et faiblesses. (On essaiera d'être synthétique et d'insister sur les points principaux.) Apporter une aide à l'élève.
2. Proposer une correction complète de de la question **C.a** .
3. Proposer une correction complète de de la question **C.b** qui exploite le travail fait par l'élève 2.
4. Proposer une correction de la question **D.c** .
5. Proposer une correction de la question **D.e** .
6. Quelle est la principale faiblesse que révèle la réponse de l'élève 3 ?
7. Proposer une correction de la question **D.f** .

(Type Epreuve 1)

On cherche les solutions d'équations de la forme $a^2 + b^2 = 2^k$ avec $(a, b, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

8.1 Démontrer que si N est un multiple de 4 et que si a et b sont des entiers tels que $a^2 + b^2 = N$ alors a et b sont pairs.
8.2 En déduire que l'équation $a^2 + b^2 = 2^{2n}$ n'a pas de solution $(a, b, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. On pourra utiliser une récurrence.
8.3 Démontrer que l'équation $a^2 + b^2 = 2^{2n+1}$ admet une unique solution $(a, b, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ que l'on précisera.