Arithmétique

Durée : 2 h

L'usage des documents, des calculatrices, des ordinateurs et des téléphones portables n'est pas autorisé. Les téléphones portables doivent être rangés dans les sacs. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent êtres utilisés pour la suite du problème. Il ne faut pas hésiter à traiter les questions dans l'ordre de son choix.

Nous allons analyser l'exercice suivant que l'on ne demande pas de résoudre en totalité. L'exercice est tiré du manuel *Sesamaths* de Terminale Maths Expertes. Les questions auxquelles vous devez répondre sont indiquées plus bas dans *Les questions pour le candidat.*

L'exercice.

123 Le numéro INSEE ou de sécurité sociale Algo

Le numéro de sécurité sociale est une succession de 13 chiffres suivie d'une clé de 2 chiffres. Par exemple 2 84 07 17 300 941 clé 46.

On pose alors A le nombre composé des 13 chiffres et K la clé de contrôle constitué par les deux derniers chiffres.
Dans notre l'exemple, on a donc :
$A = 2\,84\,07\,17\,300\,941$ et $K = 46$.
Soit r le reste de la division de A par 97.
La clé de contrôle est alors $K = 97 - r$.
Pour rendre exécutable le calcul sur une calculatrice, on décompose A en deux séries de nombres. B correspond au 7 premiers chiffres en partant de la gauche et C aux six derniers.
On a alors : $A = 10^6 \times B + C$.

1. Démontrer que : $A \equiv 27B + C\ (97)$.

2. Vérifier alors que la clé de l'exemple est 46.

3. Écrire une fonction `cle(B,C)` en **Python** qui permet, en rentrant B et C, de calculer la clé K.
Rentrer cette fonction sur la calculatrice.
Tester en cherchant la clé du numéro de sécurité sociale suivant : 1 62 06 74 086 017.

4. Montrer que si dans le nombre complet en incluant la clé (15 chiffres), un et un seul chiffre est erroné, l'erreur est détectée, et qu'il en est de même si deux chiffres consécutifs sont permutés.

L'enseignant décide de remplacer la question **4.** par les questions suivantes, pour décomposer le problème :

4.1 Montrer que si seul un chiffre du nombre A est erroné alors l'erreur est détectée.
4.2 Montrer que si seul un chiffre de la clé K est erroné alors l'erreur est détectée.
4.3 Montrer que si seuls deux chiffres consécutifs du nombre A sont permutés alors l'erreur est détectée.
4.4 Montrer que si seuls les deux chiffres de la clé K sont permutés alors l'erreur est détectée.

Deux définitions possibles de congruence dans deux manuels différents.

> **Définition**
>
> Soient m un entier naturel non nul, et a et b deux entiers relatifs.
>
> On dit que a et b sont **congrus modulo m** lorsqu'ils ont le même reste dans la division euclidienne par m.
>
> On dit aussi que a est **congru à b modulo m**.

> **Définition**
>
> Soient a et b deux entiers relatifs et n un entier naturel non nul.
> On dit que a est congru à b modulo n, et on note $a \equiv b\ [n]$ ou $a \equiv b (\mathrm{mod}\, n)$, lorsque $a - b$ est un multiple de n.

Réponse d'un élève à la question 4.1).

> On écrit en chiffres $A = a_{12}10^{12} + a_{11}10^{11} + \ldots + a_1 10 + a_0$. Si on appelle r le reste de la division euclidienne de A par 97, on sait d'après le cours que $A \equiv r \quad [97]$ et puisque $K = 97 - r$, on a $K \equiv -A \quad [97]$. Imaginons qu'on s'est trompé sur le chiffre a_i et qu'on l'a remplacé par le chiffre $\tilde{a}_i$, avec $a_i \neq \tilde{a}_i$. Ainsi on a tapé à la place de A le chiffre $A' = a_{12}10^{12} + \ldots + \tilde{a}_i 10^i + \ldots + a_0$. Si l'erreur n'est pas détectée c'est que la même clé K convient pour le nombre A' et donc $A \equiv A' \quad [97]$.
> Donc $a_{12}10^{12} + \ldots + a_i 10^i + \ldots + a_0 \equiv a_{12}10^{12} + \ldots + \tilde{a}_i 10^i + \ldots + a_0 \quad [97]$, et donc
> $a_i 10^i - \tilde{a}_i 10^i \equiv 0 \quad [97]$, d'où
> $97 \mid 10^i(a_i - \tilde{a}_i)$.
> Mais 97 ne divise pas 10^i. De plus 97 ne divise pas $a_i - \tilde{a}_i$ (car a_i et $\tilde{a}_i$ sont deux chiffres différents).
> Donc 97 ne divise pas le produit $10^i(a_i - \tilde{a}_i)$.
> C'est donc faux et l'erreur est détectée.

Les questions pour le candidat.

A. Montrer que les deux définitions de congruence des deux manuels sont en fait équivalentes.

B. Analyser la réponse de l'élève en mettant en évidence acquis et faiblesses. On essaiera de hiérarchiser. Pour chaque faiblesse significative relevée, proposer une remédiation.

C. Montrer, si possible de deux façons différentes (utilisant des outils vraiment différents) que pour tout entier $i \geq 0$ on a 97 qui est premier avec 10^i.

D. Proposer une réponse à la question **4.3** qui soit destinée à la classe.

E. Un élève affirme *si l'on se trompe en tapant le numéro de la carte, on peut toujours s'en rendre compte grâce à la clé.* On proposera une réponse tranchée, claire et convaincante pour la classe.

Questions indépendantes.

F. Enoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre rationnel soit un nombre décimal. La condition énoncée sera liée à un dénominateur et fera apparaître des puissances de 2 et de 5.

G. Résoudre les équations suivantes d'inconnues $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{Z}$:
G.1. $5^n = a^2$.
G.2. $5^n = a^2 - 1$.
G.3. $5^n = a^2 - 2$.